Entwicklung willkürlicher Funktionen vermittelst meromorpher

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

eingereicht und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Eugen Freund

Sonnabend, den 14. August 1909, Vormittags 11½ Uhr

im Musiksaale der Universität

Vortrag

über das Thema:

„Riemanns Bedeutung für die Wissenschaft"

und

Promotion

ACAD. LAND. BAT. BIBL.

Breslau
Druck und Verlag H. Fleischmann
1909

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referent: Professor Dr. **A. Kneser.**

Termin der mündlichen Prüfung: 26. Mai 1909.

Herrn Professor Dr. Kneser

in Hochachtung und Dankbarkeit.

Inhalt.

Seite

Einleitung 7

Erster Abschnitt.

Hilfssätze und Formeln.

§ 1. Die Funktion $\frac{e^{\alpha z}}{e^z - c}$ 9

§ 2. Ein Lemma 16

§ 3. Die transcendente Gleichung $\mathfrak{Cof}\, z \cos bz = 1$ und Beweis einiger Formeln 19

Zweiter Abschnitt.

Entwicklung willkürlicher Funktionen.

§ 4. Ableitung der Fourierschen Reihe aus einer allgemeineren . 29

§ 5. Entwicklungen allgemeinerer Art 40

§ 6. Reihendarstellung beim Problem der radial sich abkühlenden Kugel 48

§ 7. Die Entwicklung beim Problem der lateralen Schwingungen eines elastischen Stabes 55

Einleitung.

Cauchy hat in einer Reihe von Schriften, vor allem in den 1826/27 veröffentlichten „Exercices de Mathématiques“ die von ihm geschaffene Residuenrechnung der Analysis und Algebra als wertvolles Hilfsmittel dienstbar gemacht. So benutzt er sie in seinen Abhandlungen „Sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies“, Oeuvres complètes, IIe sér., t. VII und „Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique“, Paris 1827, zum Nachweis der Möglichkeit, dass eine in einem reellen Intervalle willkürlich gegebene Funktion $f(x)$ auf verschiedene Arten in eine unendliche Reihe entwickelt werden kann. Hierbei geht er von dem Satze aus, dass das mit $\frac{1}{2\pi i}$ multiplizierte, im positiven Sinne über den Umfang eines einfach zusammenhängenden Bereichs erstreckte Integral einer meromorphen Funktion der komplexen Variablen z gleich der Summe der Residuen derjenigen Pole ist, die im Innern der Integrationsbahn liegen. Und zeigt von einer Funktion $F(z,x)$, deren Residuen die Glieder der Reihe sind, in welche $f(x)$ entwickelt werden soll, durch nicht einwurfsfreie Grenzübergänge und Mittelwertbetrachtungen, dass $\frac{1}{2\pi i}\int F\,dz$ für wachsende Integrationslinien gegen $f(x)$ konvergiert.

Die dem Beweis anhaftenden Lücken haben Poincaré in „Théorie analytique de la propagation de la chaleur“ und Picard im „Traité d'analyse“, t. II mit Beibehaltung

des von Cauchy eingeschlagenen Weges bereits ausgefüllt, jedoch scheinen die von diesen Autoren gelieferten Beweise ziemlich weitläufig. Kürzer und durchsichtiger ist die von Poincaré und Picard abweichende Argumentation, die Herr Prof. Kneser in seinen funktionentheoretischen Vorlesungen für die Fouriersche Entwicklung gegeben hat, und die den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildet.

Ihr Ziel, zu dem sie zu gelangen sucht, ist die Ausdehnung der Kneserschen Methode auf wichtige Reihenentwicklungen der mathematischen Physik im Anschluss an Cauchys Untersuchungen.

Erster Abschnitt.

Hilfssätze und Formeln.

§ 1. Die Funktion $\frac{e^{\alpha z}}{e^z - c}$.

Es sei im folgenden $c = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{i\Theta}$ $(0 \leqq \Theta < 2\pi)$ eine von Null verschiedene, endliche Constante, α ein positiver echter Bruch, ν jede beliebige ganze Zahl, das Zeichen lg bedeute den reellen Logarithmus.

Wir betrachten zuvörderst in der complexen $z = x + iy$-Ebene die meromorphe Funktion $f_0(z) = \frac{1}{e^z - c}$, welche an den durch die Gleichung

$$z_\nu = \frac{1}{2} \lg (a^2 + b^2) + i (\Theta + 2\nu\pi)$$

definierten Stellen ausserwesentliche Singularitäten aufweist. Dazu beschreiben wir mit einem beliebig kleinen, jedoch fest gewählten Radius η um die Pole z_ν die „Sicherheitskreise" λ_ν, bestimmen eine positive Zahl p so, dass $p > \frac{1}{2}\left|\lg (a^2 + b^2)\right|$ ist, und begrenzen das Singularitätsgebiet durch die zur y=Axe parallelen Geraden $x = +p$, $x = -p$. Ersichtlich liegen dann die Kreise λ_ν im Innern des Streifens $-p \leqq x \leqq +p$.

Aus $p > \frac{1}{2}\left|\lg (a^2 + b^2)\right|$ folgt $e^p > \sqrt{a^2 + b^2} > e^{-p}$; mithin gilt 1) für den Bereich der z-Ebene $x > p$:

$|e^z| = e^x > e^p > |c|$, daher $|e^z - c| \geqq |e^z| - |c| > e^p - |c|$, also

$$|f_0(z)| < \frac{1}{e^p - \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Analog erhalten wir 2) für den Bezirk $x < -p$: $|e^z| < e^{-p} < |c|$, so dass $|e^z - c| \geqq |c| - |e^z| > |c| - e^{-p}$, demnach $|f_0(z)| < \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} - e^{-p}}$ ist.

3) In dem Rechteck, das von den Geraden $x = p$, $x = -p$, $y = 0$, $y = 2\pi$ gebildet wird, lässt sich zu jedem c eine positive Zahl C so bestimmen, dass nach Ausschluss des Kreises λ_0 um den Pol $x = \lg \sqrt{a^2 + b^2}$, $y = \Theta$ in dem Gebiete des Rechtecks $|f_0(z)| < C$ wird. Da nun sämtliche Kreise λ_ν denselben Radius η besitzen, muss in dem ganzen Streifen $-p \leqq x \leqq p$ ausserhalb der Kreise λ_ν wegen der Periodizität der Funktion $f_0(z)$ ihr absoluter Betrag kleiner als C sein.

Die grösste der drei positiven Constanten $\frac{1}{e^p - |c|}$, $\frac{1}{|c| - e^{-p}}$, C bezeichnen wir mit M_0, dann ist in der z-Ebene nach Ausschluss der Sicherheitskreise $|f_0(z)| < M_0$.

Setzen wir $f_1(z) = e^{\alpha z} f_0(z)$, so lässt sich zeigen, dass $|f_1(z)|$ ausserhalb der λ_ν unter einer von α unabhängigen festen Schranke liegt.

In der Tat ist 1) für $x < -p$:

$$|e^{\alpha z}| = e^{\alpha x} < e^{-\alpha p} < 1, \text{ daher } |f_1(z)| < M_0.$$

2). In dem Gebiete $x > p$ erweitern wir den Bruch $\frac{e^{\alpha z}}{e^z - c}$ mit e^{-z} und setzen $z = -\bar{z}$, so dass $f_1(z)$ übergeht in $-\frac{1}{c} \frac{e^{(1-\alpha)\bar{z}}}{e^{\bar{z}} - \frac{1}{c}}$. Da $-x < -p$ und $0 < 1 - \alpha < 1$, folgt

$$|e^{(1-\alpha)\bar{z}}| = e^{-(1-\alpha)x} < e^{-(1-\alpha)p} < 1, \text{ weil ferner } \left|\frac{1}{e^{\bar{z}} - \frac{1}{c}}\right|$$

unter einer festen Grenze M_1 liegt, ergibt sich $|f_1(z)| < \frac{M_1}{|c|}$.

3) Für den Bereich $-p \leqq x \leqq +p$ gilt $|e^{\alpha z}| = e^{\alpha x} \leqq e^{\alpha p} < e^p$, also ausserhalb der λ_ν: $|f_1(z)| < M_0 e^p$.

Somit bleibt $|f_1(z)|$ unter einer von α unabhängigen Schranke M in dem Gebiete $\mathfrak{G}$, wofern M die grösste der beiden positiven Zahlen $\frac{M_1}{|c|}$ und $M_0 e^p$ bedeutet und unter $\mathfrak{G}$ der Bereich der z-Ebene ausserhalb der Sicherheitskreise verstanden wird.

Dass im Gebiete $\mathfrak{G}$ auch der Bruch $\frac{e^z}{e^z - c}$ dem absoluten Betrage nach unter einer festen, endlichen Schranke liegt, folgt daraus, dass er in die Form $1 + c f_0(z)$ gebracht werden kann.

Wenn wir nun um den Punkt $x = \frac{1}{2} \lg(a^2 + b^2) = a'$, $y = 0$ als Zentrum mit discret wachsenden Radien unendlich viele Kreise $K_1, K_2, \ldots K_n, \ldots$ so beschreiben, dass sie keinen der Kreise λ_ν schneiden, dann behaupten wir, dass der Grenzwert des Konturintegrals $\int_{K_n} f_1(z) \frac{dz}{z}$ mit wachsendem n sich der Null unbegrenzt nähert.

Nach Cauchy tragen wir im Zentrum der Kreise K_n an die Gerade $x = a'$ nach beiden Seiten einen beliebig kleinen, jedoch fest gewählten Winkel ε an, dessen freie Schenkel wir uns bis zu den Schnittpunkten mit den Kreisen K_n verlängert denken. Dann können wir n so gross wählen, dass $|x|$ auf $K_n, K_{n+1}, \ldots$ ausserhalb der Sektoren 2ε über einer beliebig gross gegebenen Grenze liegt.

Es sei $z - a' = r_n e^{\omega}$, wobei wir unter r_n den Radius des Kreises K_n verstehen wollen. Dann ist $\frac{dz}{z - a'} = i d\omega$ und

$$\int_{K_n} f_1(z)\,\frac{dz}{z-a'} = i\int_0^{2\pi} f_1\left(r_n e^{i\omega}\right)\,d\omega$$

$$= i\left[\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} f_1\,d\omega + \int_{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}+\varepsilon} f_1\,d\omega + \int_{\frac{3\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{5\pi}{2}-\varepsilon} f_1\,d\omega + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon} f_1\,d\omega\right].$$

Setzen wir $f_1\,(r_n e^{i\omega}) = P_1 + i\,Q_1$, so gilt, weil wie bereits bewiesen, $|f_1| < M$ ist: $|P_1| < M$ und $|Q_1| < M$, also

$\left|i\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} P_1\,d\omega\right| < 2\varepsilon M$ und $\left|-\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} Q_1\,d\omega\right| < 2\varepsilon M$, demnach

$\left|i\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} f_1\,d\omega\right| < 4\varepsilon M$ und analog: $\left|i\int_{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}+\varepsilon} f_1\,d\omega\right| < 4\varepsilon M$. Folglich können die absoluten Beträge dieser beiden Integrale mit ε beliebig klein gemacht werden.

Wenn n hinreichend gross gewählt wird, nimmt x, wie oben bemerkt, in dem Integral $\int_{\frac{3\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{5\pi}{2}-\varepsilon} f_1\,d\omega$ nur Werte an, die über einer beliebig gross gegebenen Grenze liegen. Für die hier auftretenden Wertsysteme x, y ist also in dem Ausdruck $f_1(z) = \dfrac{e^{-(1-\alpha)x - i(1-\alpha)y}}{1 - c\,e^{-x}\,e^{-iy}}$, da $1-\alpha > 0$, der Zähler beliebig klein, der Nenner beliebig nahe der Zahl 1; der Wert des Integrals liegt also der Null beliebig nahe.

In dem noch zur Untersuchung übrig bleibenden Integral $\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon} f_1 \, d\omega$ konvergiert die Variable x für das ganze Intervall des Winkels ω gleichmässig mit wachsendem n gegen $-\infty$. Folglich ist der Grenzwert der Zählerfunktion von $f_1(z) = \frac{e^{\alpha x+i\alpha y}}{e^{x+iy}-c}$ gleich Null, der Nennerfunktion gleich $-c$, mithin verschwindet auch in diesem Falle $\lim_{n=\infty} f_1$ gleichmässig und das Integral hat die Grenze Null.

Lassen wir die Grösse ε gegen Null konvergieren, so ist mit der vorhergehenden Betrachtung die Gleichung bewiesen: $\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\alpha z}}{e^z-c} \frac{dz}{z-a'} = 0$. Da nun $\lim_{n=\infty} (1-\frac{a'}{z}) = 1$, so ergibt sich schliesslich:

$$(1) \quad \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\alpha z}}{e^z-c} \frac{dz}{z} = \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\alpha z}}{e^z-c} (1-\frac{a'}{z}) \frac{dz}{z-a'} = 0.$$

Unter $\mathrm{Res}_{z=\rho} f(z)$ wollen wir hier und im folgenden das Residuum der meromorphen Funktion f(z) für den Pol $z=\rho$ verstehen, unter α wie immer einen positiven echten Bruch.

Durch die Substitution $z=-\bar{z}$ geht $\frac{e^{-\alpha z}}{e^z-c}$ über in

$$\frac{e^{\alpha\bar{z}}}{e^{-\bar{z}}-c} = -\frac{1}{c} \frac{e^{(1+\alpha)\bar{z}}}{e^{\bar{z}}-\frac{1}{c}} = -\frac{1}{c} e^{\alpha\bar{z}} - \frac{1}{c^2} \frac{e^{\alpha\bar{z}}}{e^{\bar{z}}-\frac{1}{c}}.$$

Nun ist $\mathrm{Res}_{\bar{z}=0} \frac{e^{\alpha\bar{z}}}{\bar{z}} = 1$, also erhalten wir durch Anwendung des Cauchyschen Residuensatzes und der Gleichung (1):

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{-\alpha z}}{e^z - c} \frac{dz}{z} = -\frac{2\pi i}{c}.$$

Es sei ferner m eine positive ganze Zahl; dann folgt aus

$$\frac{e^{mz}}{e^z - c} = \frac{e^{mz} - c^m}{e^z - c} + \frac{c^m}{e^z - c} = e^{(m-1)z} + c\, e^{(m-2)z} + \cdots + c^{m-1} + \frac{c^m}{e^z - c}$$

die Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{mz}}{e^z - c} \frac{dz}{z} = 2\pi i \frac{c^m - 1}{c - 1} + c^m \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{1}{e^z - c} \frac{dz}{z}.$$

Vermöge der Substitution $z = u + g$ bilden wir die Kreise K_n als Kreise K'_n in der $u =$ Ebene ab und setzen $c = e^g$; dann wird der letzte Summand gleich $\lim_{n=\infty} \int_{K'_n} \frac{e^{g(m-1)}}{e^u - 1} \frac{du}{u+g}$,

wobei die Kreise K'_n die analoge Bedeutung wie bei der vorangehenden Betrachtung behalten mit der Einschränkung, dass sie die Stelle $u = -g$ nicht berühren dürfen. Da nun

$$\lim_{n=\infty} \int_{K'_n} \frac{du}{e^u - 1} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+g} \right) = g \lim_{n=\infty} \int_{K'_n} \frac{1}{e^u - 1} \frac{du}{u(u+g)}$$ ver-

schwindet, so gilt die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_{K'_n} \frac{1}{e^u - 1} \frac{du}{u+g} = \lim_{n=\infty} \int_{K'_n} \frac{1}{e^u - 1} \frac{du}{u}.$$

Das rechts vom Gleichheitszeichen stehende Integral ist gleich $-\pi i$, denn wird $B(u) = \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}$ gesetzt, so folgt

aus $B(u) = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}} = -B(-u)$, dass $\frac{B(u)}{u}$ eine gerade Funktion ist. Also gelten für $u = -\bar{u}$ die Gleichungen $\frac{B(\bar{u})}{\bar{u}} = \frac{B(u)}{u}$ und $d\bar{u} = -du$. Die Kreise K'_n mögen durch je zwei Halbkreise H'_n und $\bar{H}'_n$ ersetzt werden, so dass

$$\int_{K'_n} \frac{B(u)}{u}\, du = \int_{H'_n} \frac{B(u)}{u}\, du + \int_{\bar{H}'_n} \frac{B(u)}{u}\, du \quad \text{ist.}$$

Wenn jetzt die Variable u den Halbkreis H'_n, $\bar{u}$ also den Halbkreis $\bar{H}'_n$ durchläuft, so leuchtet ein, dass $\int_{K'_n} \frac{B(u)}{u}\, du$ verschwindet; also gilt die Formel:

$$(3) \qquad \int_{K'_n} \frac{1}{e^u - 1} \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \int_{K'_n} \frac{du}{u} = -\pi i.$$

Aus ihr folgen sofort die Gleichungen:

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{1}{e^z - c} \frac{dz}{z} = -\frac{\pi i}{c} \qquad \text{und}$$

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{mz}}{e^z - c} \frac{dz}{z} = 2\pi i \frac{c^m - 1}{c - 1} - \pi i c^{m-1}.$$

Durch die Substitution $z = -\bar{z}$ wird

$$\frac{e^{-mz}}{e^z - c} = -\frac{1}{c} \frac{e^{(m+1)\bar{z}}}{e^{\bar{z}} - \frac{1}{c}},$$ mithin gilt nach (5):

$$(5a) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{-mz}}{e^z - c} \frac{dz}{z} = -\frac{\pi i}{c^{m+1}} \left(2 \frac{c^{m+1} - 1}{c - 1} - 1 \right).$$

Da ferner $\frac{e^{(m+\alpha)z}}{e^z - c} = \frac{e^{mz} - c^m}{e^z - c} e^{\alpha z} + c^m \frac{e^{\alpha z}}{e^z - c}$

$$= \left[e^{(m-1)z} + c\, e^{(m-2)z} + \cdots + c^{m-1} \right] e^{\alpha z} + c^m \frac{e^{\alpha z}}{e^z - c}$$ ist,

so folgt durch Anwendung von (1) die Formel:

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{(m+\alpha)z}}{e^z - c} \frac{dz}{z} = 2\pi i \frac{c^m - 1}{c - 1}. \tag{6}$$

Aus dieser entsteht schliesslich analog wie (5a) aus (5):

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{-(m+\alpha)z}}{e^z - c} \frac{dz}{z} = -\frac{2\pi i}{c^{m+1}} \cdot \frac{c^{m+1} - 1}{c - 1}. \tag{6a}$$

---

§ 2. Ein Lemma.

Es seien $R(z) = c' \frac{(z-a_1)\ldots(z-a_h)}{(z-b_1)\ldots(z-b_k)}$ $(h \leqq k)$ und $S(z) = c \frac{(z-c_1)\ldots(z-c_l)}{(z-d_1)\ldots(z-d_l)} = P + iQ = \sqrt{P^2+Q^2}\, e^{i\varphi}$ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ rational gebrochene Funktionen, die für $|z| = \infty$ endlich sind.

Setzen wir $f(z) = \frac{e^{\alpha z} R(z)}{e^z - S(z)}$, so besitzt $f(z)$ Pole an den k Unendlichkeitsstellen $z = b_1, \ldots, z = b_k$ und an den durch die Gleichung

$$Z_\nu = \frac{1}{2} \lg (P^2 + Q^2) + i(\varphi + 2\nu\pi)$$

bestimmten Punkten der z-Ebene.

Im Falle h=k konvergiert die Funktion $R(z)$ mit unendlich wachsendem $|z|$ gegen die endliche, von Null verschiedene Constante c'. Nun gilt nach § 1 im Gebiete $\mathfrak{G}$ der z-Ebene die Ungleichung $\left|\frac{1}{e^z - c}\right| < M_0$, also $|e^z - c| > \frac{1}{M_0}$. Sodann ist ersichtlich: $\frac{f(z)}{f_1(z)} = R(z) \frac{e^z - c}{e^z - S(z)} = R(z) \frac{1}{1 - \frac{S(z) - c}{e^z - c}}$ und

wenn z auf das Gebiet $\mathfrak{G}$ beschränkt bleibt,

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{S(z)-c}{e^z-c} = 0, \text{ da } \lim_{|z|=\infty} S(z) = c, \text{ folglich}$$

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{f(z)}{f_1(z)} = c'.$$

Nach § 1 sind die Pole der Funktion $f_1(z)$ durch die Gleichung $z_\nu = \frac{1}{2} \lg (a^2 + b^2) + i (\Theta + 2\nu\pi)$ gegeben. Wenn nun $|z|$ eine hinreichend grosse Schranke überschritten hat, und $Z_\nu - z_\nu = \delta$ gesetzt wird, so nähert sich $|\delta|$ mit unendlich zunehmendem $|z|$ der Null. Mithin lässt sich zu einer beliebig kleinen positiven, fest gewählten Zahl η eine positive Grösse $\mathfrak{R}$ so finden, dass für jedes $|Z_\nu| > \mathfrak{R}$ der absolute Betrag von δ kleiner als η, also $|Z_\nu - z_\nu| < \eta$ ist.

Haben wir $\mathfrak{R}$ so bestimmt, dass die k Pole an den Stellen $b_1, \ldots, b_k$ und die l Nullstellen von S(z), nämlich $c_1, \ldots, c_l$, im Innern des mit $\mathfrak{R}$ um den Nullpunkt der z-Ebene beschriebenen Kreises sich befinden, so werden die Pole

$$Z_\nu = \frac{1}{2} \lg (a^2 + b^2) + i (\Theta + 2\nu\pi) + \delta$$

ausserhalb dieses Kreises mit wachsenden Werten von ν sich immer mehr einer Geraden nähern, die der imaginären y-Axe parallel läuft. Teilen wir die z-Ebene durch die Parallelen zur y-Axe $x = p$, $x = -p$, wobei die positive Grösse $p > \frac{1}{2} |\lg (a^2 + b^2)|$ gewählt sei, in drei Bereiche, so kommen die Pole der Funktion f(z), falls $|Z_\nu| > \mathfrak{R}$ ist, in den Streifen $-p \leqq x \leqq p$ zu liegen. Wir beschreiben jetzt mit dem in § 1 definierten Radius η Kreise um die Pole z_ν von $f_1(z)$; dann müssen die ausserwesentlich singulären Stellen Z_ν der Funktion f(z) für hinreichend grosse Werte von ν wegen der Ungleichung $|Z_\nu - z_\nu| < \eta$ dem Inneren dieser Kreise angehören.

Ist $|z| < \Re$, so folgt $|e^z| < e^{\Re}$, ferner $|e^{\alpha z}| < e^{\alpha\Re}$, und weil α einen positiven echten Bruch bedeutet, ist a fortiori $|e^{\alpha z}| < e^{\Re}$. Da in R(z) der Grad des Zählers nicht grösser sein sollte als der des Nenners und in S(z) Zähler und Nenner von gleichem Grade sind, liegen $|R(z)|$ und $|S(z)|$ unter einer festen Schranke, sobald ihre Unendlichkeitsstellen $b_1, \ldots, b_k$ und $d_1, \ldots, d_l$ durch Kreise mit beliebig klein gewähltem Radius ausgeschlossen werden. Geschieht dasselbe mit den Polen Z_ν, so verbleibt $|f(z)|$ im Innern des Kreises mit dem Radius $\Re$ unter einer von α unabhängigen festen Grenze.

Wenn wir nun um den Punkt $x = a' = \frac{1}{2} \lg (a^2 + b^2)$, $y = 0$ als Zentrum dieselben Kreise K_n beschreiben, von denen im § 1 die Rede war, und das Geradenpaar $y^2 - (x - a')^2 \cot^2 \varepsilon = 0$ mit der früher über ε getroffenen Festsetzung konstruieren, so leuchtet ein, dass die Kreise K_n keinen der Kreise λ_ν mit dem Radius η schneiden können, sobald n hinreichend gross gewählt wird. Entsprechend dem in § 1 durchgeführten Grenzübergange lässt sich jetzt leicht zeigen, dass $\lim_{n=\infty} \int_{K_n} f(z) \frac{dz}{z-a'}$ und daher auch $\lim_{r=\infty} \int_{K_n} f(z) \frac{dz}{z}$ gegen Null konvergiert.

Es sei wieder $z - a' = r_n e^{i\omega}$, so dass also auf den Kreisen K_n mit den Radien r_n die Beziehung gilt: $\frac{dz}{z-a'} = id\omega$, dann können $\left| \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} f(r_n e^{i\omega}) d\omega \right|$ und $\left| \int_{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}+\varepsilon} f(r_n e^{i\omega}) d\omega \right|$ mit ε beliebig klein gemacht werden, da der absolute Be-

trag des Integranden unter einer festen Grenze liegt. Weil in dem Integral $\int_{\frac{3\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{5\pi}{2}-\varepsilon} f d\omega$ für $n = \infty$ die Veränderliche x gleichmässig gegen $+\infty$ konvergiert, ist in dem Ausdruck $f(z) = \frac{e^{(\alpha-1)z}R(z)}{1-e^{-z}S(z)}$ der Grenzwert des Nenners gleich 1, der des Zählers gleich Null, weil $\alpha-1$ negativ und $R(z)|^{|z|=\infty}$ endlich ist, folglich verschwindet $\lim_{n=\infty} f$ gleichmässig und das Integral hat die Grenze Null. Ferner ergibt sich leicht:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon} f(r_n e^{i\omega}) d\omega = 0.$$

Da nun ε beliebig klein gemacht werden kann, so ist hiermit bewiesen, dass auf den diskret wachsenden Kreisen K_n die Gleichung gilt: $\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\alpha z}R(z)}{e^z-S(z)} \frac{dz}{z-a'} = 0.$

Folglich ist auch

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\alpha z}R(z)}{e^z-S(z)} \frac{dz}{z} = 0. \tag{7}$$

Mit Hilfe von (7) gelingt es, in derselben Weise wie in § 1, die Formeln zu entwickeln, in denen α durch eine beliebige reelle Zahl ersetzt ist.

---

§ 3. Die transcendente Gleichung $\mathfrak{Cof}\, z \cos bz = 1$ und Beweis einiger Formeln.

An den Nullstellen der Gleichung

$$(e^z + e^{-z}) \cos bz = 2, \tag{8}$$

deren Existenz wir für beliebige

Werte der Constante b vorläufig hypothetisch annehmen, wird die Funktion $f_2(z) = \frac{1}{(e^z+e^{-z})\cos bz-2}$ ausserwesentlich singulär. Es sei zunächst b positiv.

Durch Anwendung einer bekannten Formel lässt sich die Gleichung (8) leicht auf die Form bringen

$$\text{(8a)} \qquad \operatorname{tg}\frac{bz}{2} = \frac{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}},$$

die sich der von Cauchy in seiner Abhandlung „Sur la nature des racines de quelques équations transcendantes“ [1]) untersuchten Gleichung $\operatorname{tg} u = -A \operatorname{itg}(icu)$ als Spezialfall für $A = 1$, $c = \frac{1}{b}$, $u = \frac{bz}{2}$ subsumiert. Demnach hat sie unendlich viele reelle, paarweise entgegengesetzt auftretende Wurzeln und unendlich viele rein imaginäre mit derselben Eigenschaft, während eigentliche komplexe Lösungen nicht existieren. In dem speziellen Falle $b = 1$, der für uns später von Interesse sein wird, liegen sämtliche Wurzeln zu je vieren auf konzentrischen Kreisen mit dem Ursprung des Koordinatensystems als Mittelpunkt; denn ist $z = h$ eine positive Wurzel der Gleichung $(e^z + e^{-z})\cos z = 2$, so wird sie auch durch die Werte $-h$, ih und $-ih$ befriedigt.

Um zu Gleichung (8a) zu gelangen, haben wir durch $e^z + e^{-z}$ dividiert. Daher schliessen wir sämtliche Nullstellen $(\nu + \frac{1}{2})\pi i$ der Gleichung $e^z + e^{-z} = 0$ durch Kreise μ_ν von der z-Ebene aus, deren Radius η beliebig klein und für alle Kreise konstant sei, und beschreiben mit demselben Radius die Kreise μ'_ν und λ_ν um die Nullstellen $(\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{b}$ der Gleichung $\cos bz = 0$ und um sämtliche Pole der Funktion $f_2(z)$.

[1]) Oeuvres, (2) t. VI, p. 366.

Um $f_2(z)$ ausserhalb dieser Kreise zu untersuchen, wählen wir zwei beliebige positive Grössen p und q und teilen die $z = x + iy$ = Ebene durch die Geraden $x = p$, $x = -p$, $y = q$, $y = -q$ in neun Bereiche. Verstehen wir unter $\mathfrak{Cof}\, z$, $\mathfrak{Sin}\, z$ den hyperbolischen Cosinus, resp. Sinus der Variablen z und setzen $E(b, z) = 4\,(\mathfrak{Cof}\, z \cos b\, z - 1)$, so ist $f_2(z) = \frac{2}{E(b,z)}$ und $|\,\mathfrak{Cof}\, z\,| = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x} + e^{-2x} + 2\cos 2y}$. Wie aus der Natur des hyperbolischen Cosinus hervorgeht, gilt für die Gebiete $x > p$ und $x < -p$ der z-Ebene die Ungleichung

$$e^{2x} + e^{-2x} > e^{2p} + e^{-2p}$$

und weil $2\cos 2y \geqq -2$, ist in den betrachteten Bezirken $|\,\mathfrak{Cof}\, z\,| > \mathfrak{Sin}\, p$. Analog ergibt sich für $y > q$ und $y < -q$, weil $|\cos b\, z| = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2by} + e^{-2by} + 2\cos 2bx}$ ist, die Ungleichung $|\cos b\, z| > \mathfrak{Sin}\, b\, q$. Folglich ist $|\,\mathfrak{Cof}\, z \cos b\, z\,| > \mathfrak{Sin}\, p\, \mathfrak{Sin}\, b\, q$ in den 4 Bereichen $\begin{cases} x > p & x > p & x < -p & x < -p \\ y > q, & y < -q, & y > q, & y < -q \end{cases}$.

Da wir die Grössen p und q so annehmen können, dass $\mathfrak{Sin}\, p\, \mathfrak{Sin}\, b\, q > 1 + s$ ist, wobei die positive Zahl s beliebig gewählt sei, erhalten wir

$$\frac{1}{4}|\,E(b,z)\,| \geqq \Big|\,|\,\mathfrak{Cof}\, z \cos b\, z\,| - 1\,\Big| > s,$$

also $|\,f_2(z)\,| < \frac{1}{2s}$.

In den noch übrig bleibenden Gebieten liegt die Funktion $f_2(z)$ dem absoluten Betrage nach ausserhalb der Kreise λ_ν, μ_ν und μ'_ν ebenfalls unter einer festen Grenze. Denn ausserhalb μ_ν und μ'_ν bleiben die absoluten Beträge von $\mathfrak{Cof}\, z$ und $\cos b\, z$ über festen Schranken, woraus die Behauptung leicht folgt.

Sobald $|\,z\,|$ einen hinreichend grossen Betrag $\mathfrak{S}$ überschritten hat, nähern sich die reellen Wurzeln der Gleichung (8) denen der Gleichung $\cos b\, z = 0$. Wenn also γ_ν die Gleichung $\cos b\, z = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, z}$ befriedigt, so können wir

$\gamma_\nu = (\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{b} - (-1)^\nu \omega_\nu$ setzen, wobei $\lim_{\nu=\pm\infty} \omega_\nu$ gegen Null konvergiert[1]). Da Gleichung (8) für $z = iu$ in $\cos u = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, bu}$ übergeht, so sind die reellen Wurzeln u_ν der letzteren dargestellt durch $u_\nu = (\nu + \frac{1}{2})\pi - (-1)^\nu \omega'_\nu$, wobei wieder $\lim_{\nu=\pm\infty} \omega'_\nu = 0$ ist; daher hat jede rein imaginäre Wurzel δ_ν von (8) die Gestalt

$$\delta_\nu = (\nu + \frac{1}{2})\pi i - (-1)^\nu i\omega'_\nu .$$

Wählen wir nun in dem Bereiche $|z| > \mathfrak{S}$ die Stellen $(\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{b}$ auf der reellen, $(\nu + \frac{1}{2})\pi i$ auf der imaginären Axe als Mittelpunkte der λ_ν, so folgt, dass für $|z| > \mathfrak{S}$ die Kreise μ'_ν und μ_ν durch λ_ν ersetzt werden können.

Um zu zeigen, dass auf einer unbegrenzten Folge diskret wachsender, geschlossener Curven $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, auf denen $f_2(z)$ nirgends singulär wird, $\lim_{n=\infty} \int_{C_n} f_2(z)\,dz$ verschwindet, tragen wir im Nullpunkt der z-Ebene an die x- und y-Axe nach beiden Seiten einen beliebig klein gewählten Winkel ε an, so dass ausserhalb der vier Sektorenräume 2ε für ein hinreichend grosses n die absoluten Beträge von x und y über beliebig hohen Grenzen liegen und sich mit wachsenden Werten von n dem Unendlichen annähern.

Erweitern wir die meromorphe Funktion $f_2(z) = \frac{2}{E(b,z)}$ der Reihe nach mit 1) $e^{-(1-ib)z}$, 2) $e^{-(1+ib)z}$, 3) $e^{(1-ib)z}$ und 4) $e^{(1+ib)z}$, so wird ersichtlich, dass $f_2(z)$ verschwindet, wenn

[1]) Lord Rayleigh, The Theory of Sound, I. p. 222.

1) $x = +\infty$, $y = +\infty$, 2) $x = +\infty$, $y = -\infty$, 3) $x = -\infty$, $y = -\infty$ und 4) $x = -\infty$, $y = +\infty$ ist, da in allen vier Fällen der Nenner gleich 1, der Zähler gleich Null wird.

In der Tat ergibt sich dies Resultat durch folgende einfache Rechnung: Es ist

$$1)\quad f_{\bar{z}}(z) = \frac{2\,e^{-(1-ib)z}}{e^{2ibz} + 1 + e^{-2z} + e^{-2(1-ib)z} - 4\,e^{-(1-ib)z}},$$

$$\lim_{x=y=+\infty} e^{-(1-ib)z} = \lim_{x=y=+\infty} e^{-x-by-i(y-bx)} = 0,$$

$$\lim_{x=y=+\infty} e^{2ibz} = \lim_{x=y=+\infty} e^{-2by+2ibx} = 0, \quad \lim_{x=y=+\infty} e^{-2z} = 0, \text{ also } \lim_{x=y=+\infty} f_2(z) = 0;$$

$$2)\quad f_2(z) = \frac{2\,e^{-(1+ib)z}}{1 + e^{-2ibz} + e^{-2(1+ib)z} + e^{-2z} - 4\,e^{-(1+ib)z}},$$

$$\lim_{\substack{x=+\infty \\ y=-\infty}} e^{-x+by-i(bx+y)} = 0, \quad \lim_{\substack{x=+\infty \\ y=-\infty}} e^{2b(y-ix)} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x=+\infty \\ y=-\infty}} e^{-2z} = 0, \text{ daher } \lim_{\substack{x=+\infty \\ y=-\infty}} f_2(z) = 0;$$

$$3)\quad f_2(z) = \frac{2\,e^{(1-ib)z}}{e^{2z} + e^{2(1-ib)z} + e^{-2ibz} + 1 - 4\,e^{(1-ib)z}},$$

$$\lim_{x=y=-\infty} e^{(1-ib)z} = 0, \quad \lim_{x=y=-\infty} e^{2z} = 0, \quad \lim_{x=y=-\infty} e^{-2ibz} = 0,$$

somit $\lim_{x=y=-\infty} f_2(z) = 0$ und analog:

$$4)\quad \lim_{\substack{x=-\infty \\ y=+\infty}} f_2(z) = \lim_{\substack{x=-\infty \\ y=+\infty}} \frac{2\,e^{(1+ib)z}}{e^{2(1+ib)z} + e^{2z} + 1 + e^{2ibz} - 4e^{(1+ib)z}} = 0.$$

Voranstehendes Tableau benutzen wir gleichzeitig zur Untersuchung der Funktion innerhalb der Sektorbereiche 2ε. In diesen wird für $n = \infty$ eine der Variablen x und y unendlich gross mit festem Vorzeichen, während die entsprechende

andere Veränderliche alle Werte zwischen beliebig grossen positiven und beliebig grossen negativen Beträgen annimmt.

In den Sektoren, in welchen die reelle Axe liegt, ist $|\frac{y}{x}| \leqq \operatorname{tg} \varepsilon$, also kann $b\,|\frac{y}{x}|$ für die als endlich vorausgesetzte Grösse b mit ε beliebig klein gemacht werden, so dass demnach $1 + \frac{by}{x}$ eine positive Zahl darstellt. Wenn für unendlich wachsendes n die Variable x unendlich gross mit positivem Vorzeichen wird, so folgt, wenn wie in 1) die Funktion $f_2(z)$ mit $e^{-(1-ib)z}$ erweitert wird, dass

$$\lim_{n=\infty} e^{-(1-ib)z} = \lim_{n=\infty} e^{-x(1+\frac{by}{x})} \cdot e^{-i(y-bx)} \text{ und } \lim_{n=\infty} e^{-2z}$$

verschwinden. Somit ist der Grenzwert der Zählerfunktion gleich Null, derjenige der Nennerfunktion gleich $\lim_{n=\infty} (e^{2ibz} + 1)$. Nun schneiden die Curven C_n keinen der Kreise λ_ν, und weil die Wurzeln der Gleichung $e^{2ibz} = -1$ die Centren der λ_ν auf der reellen Axe sind, ist $e^{2ibz} + 1$ auf den C_n um einen endlichen Betrag von Null verschieden, folglich verschwindet $f_2(z)$ mit wachsendem n in dem betrachteten Sektorgebiet.

Im Sektorbereich der y-Axe ist $1 - \frac{x}{by} > 0$, weil $|\frac{x}{y}| \leqq \operatorname{tg} \varepsilon$, daher wird für $y = -\infty$ in No. 2) des Tableaus

$$\lim_{n=\infty} e^{-(1+ib)z} = \lim_{n=\infty} e^{by(1-\frac{x}{by})} \cdot e^{-i(bx+y)} = 0.$$

Nun ist $e^{-2z} + 1 \neq 0$ auf den Curven C_n, wie aus der Beziehung zwischen den Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{Cof}\, z = 0$ und den Mittelpunkten der λ_ν folgt, und ferner $\lim_{n=\infty} e^{-2ibz} = 0$, somit ist der Grenzwert des Nenners von Null verschieden, mithin der Grenzwert der Funktion gleich Null.

Der analoge Nachweis für die Sektorbereiche, in denen $x = -\infty$, $y = +\infty$ ist, lässt sich durch Zuhilfenahme von 3) und 4) entsprechend erbringen, daher ergibt sich:

$$\lim_{n=\infty} \int_{C_n} \frac{1}{(e^z + e^{-z}) \cos bz - 2} dz = 0. \tag{9}$$

Um die Begriffe zu fixieren, hatten wir b als positive Grösse vorausgesetzt, nun erkennen wir sofort, dass b in obiger Formel negativ sein darf. Im Falle $b = 0$ nimmt Gleichung (8) die Gestalt an: $\mathfrak{Cof}\, z = 1$ und hat daher die Stellen $2\nu\pi i$ zu Wurzeln. Die Funktion $f_2(z)$ wird gleich $\left[\frac{e^{\frac{z}{2}}}{e^z - 1}\right]^2$, ihr absoluter Betrag im Gebiete $\mathfrak{G}$ der z-Ebene nach § 1 kleiner als M^2; folglich ist nach demselben Paragraphen und nach 1) und 3) oder 2) und 4) des Tableaus auf den um den Nullpunkt beschriebenen Kreisen K_n mit den Radien $n\pi$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{1}{e^z + e^{-z} - 2} \cdot \frac{dz}{z} = 0.$$

Wenn schliesslich $b = ib'$ gesetzt wird, wobei b' eine reelle endliche Constante bedeuten möge, geht (8) über in die Gleichung:

(9a) $\mathfrak{Cof}\, z\, \mathfrak{Cof}\, b'z = 1$. Da der hyperbolische Cosinus für ein reelles, von Null verschiedenes Argument grösser als 1 ist, besitzt die Gleichung ausser der Doppelwurzel $z = 0$ keine reelle Lösung. Von der Existenz doppelt unendlich vieler rein imaginärer Nullstellen, die jedesmal paarweise entgegengesetzt auftreten müssen, überzeugen wir uns in folgender Weise: Für ein hinreichend grosses $|z|$ nähern sich die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{Cof}\, z = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, b'z}$ oder $\mathfrak{Cof}\, b'z = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, z}$ denen der Gleichung $\mathfrak{Cof}\, z = 0$ oder $\mathfrak{Cof}\, b'z = 0$, so dass also die Lösungen von (9a) dargestellt sind durch

$(\nu+\frac{1}{2})\pi i-(-1)^{\nu}\sigma_{\nu} i$ und $(\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{b'}i-(-1)^{\nu}\sigma_{\nu}' i$, wofern $\lim_{\nu=\pm\infty}\sigma_{\nu}$ und $\lim_{\nu=\pm\infty}\sigma_{\nu}'$ gegen Null konvergieren. Werden die Pole der Funktion $f_2(z)$ durch die Kreise λ_{ν}, deren Radius η eine beliebig klein gegebene Constante ist, von der imaginären Axe ausgeschlossen, so verbleibt der absolute Betrag von $f_2(z)$ ausserhalb der λ_{ν} in der ganzen z-Ebene unter einer festen Grenze, wie durch eine vereinfachende Modifikation des Beweises auf pag. 21 gezeigt werden kann. Daher folgt durch Anwendung der in § 1 entwickelten Methode und aus 1) und 3) resp. 2) und 4) des Tableaus für positives resp. negatives b′:

Auf den Kreisen K_n, $K_{n+1}, \ldots$, welche keinen der Kreise λ_{ν} berühren, ist

$$\lim_{n=\infty}\int_{K_n}\frac{1}{\mathfrak{Cof}z\,\mathfrak{Cof}b'z-1}\,\frac{dz}{z}=0.$$

Ersetzen wir in (9) die Curven C_n durch die entsprechenden um den Nullpunkt beschriebenen Kreise K_n, auf denen $f_2(z)$ nirgends Pole besitzt. Dann ist für reelles b auf den Kreisen K_n: $\lim_{n=\infty} f_2(z)=0$, und da der Punkt $z=0$ bereits durch den Kreis λ_0 von der z-Ebene ausgeschlossen worden ist, konvergiert $\lim_{n=\infty}\frac{f_2(z)}{z}$ erst recht gegen Null, daher erhalten wir:

(10) $$\lim_{n=\infty}\int_{K_n}\frac{1}{E(b,z)}\,\frac{dz}{z}=0.$$

Es sei $\int_{K_n}\frac{e^{z(1+ib)}+e^{z(1-ib)}-2}{E(b,z)}\,\frac{dz}{z}=A$, dann ist auch

$$\int_{K_n} \frac{e^{-z(1+ib)}+e^{-z(1-ib)}-2}{E(b,z)} \frac{dz}{z} = A, \text{ denn } E(b,-z) = E(b,z);$$

nun ist $2A = 2\pi i$, also

$$A = \pi i. \tag{11}$$

Die Funktion $f_3(z) = \frac{e^{(\beta+ib)z}}{E(b,z)}$, in der die Grösse β der Bedingung unterliegt $0 \leq \beta \leq 1$, bleibt dem absoluten Betrage nach in der z-Ebene ausserhalb der Kreise λ_ν unter einer festen, von β unabhängigen, positiven Schranke.

Erweitern wir $f_3(z)$ entsprechend No. 1 des Tableaus mit $e^{-(1-ib)z}$, so folgt für $x > p$, $y > q$ und positives b:

$$\left| e^{(\beta-1)z} e^{2ibz} \right| < e^{-(1-\beta)p - 2bq} < 1, \text{ ferner}$$

$$\left| e^{2ibz}+e^{-2z}+e^{-2(1-ib)z} - 4e^{-(1-ib)z} \right| < e^{-2bq}+e^{-2p} + e^{-2(p+bq)}+4e^{-(p+bq)}.$$

Die Grössen p und q wählen wir so, dass die Summe rechts vom Ungleichheitszeichen kleiner als der positive echte Bruch α ist, dann ist

$$\left| 1+e^{2ibz}+e^{-2z}+e^{-2(1-ib)z}-4e^{-(1-ib)z} \right|$$

$$\geq \left| 1 - \left| e^{2ibz}+e^{-2z}+e^{-2(1-ib)z} - 4e^{-(1-ib)z} \right| \right| > 1-\alpha,$$

folglich $|f_3(z)| < \frac{1}{1-\alpha}$. Wenn b negativ ist, erweitern wir die meromorphe Funktion mit $e^{-(1+ib)z}$ und erhalten dasselbe Ergebnis. Durch passende Erweiterung bei positivem und negativem b ergibt sich für die drei Gebiete $x > p$, $y < -q$; $x < -p$, $y > q$; $x \leq -p$, $y < -q$ wiederum die obige Ungleichung.

In dem Bereich $x > p$, $-q \leq y \leq +q$ gilt für positives b die Ungleichung: $\left| e^{(\beta-1)z} e^{2ibz} \right| < e^{-(1-\beta)p+2bq} < e^{2bq}$, da $e^{-2by} \leq e^{2bq}$. Nun ist ausserhalb der Kreise λ_ν:

$$\left| e^{2ibz}+e^{-2z}+e^{-2(1-ib)z} - 4e^{-(1-ib)z} \right| < 2e^{2bq} + 1 + 4e^{bq}$$

$< 6e^{2bq}+1$, folglich: $\left|1+e^{2ibz}+e^{-2z}+e^{-2(1-ib)z}-4e^{-(1-ib)z}\right|$

$\geq \left| 1 - \left| e^{2ibz} + e^{-2z} + e^{-2(1-ib)z} - 4e^{-(1-ib)z} \right| \right| > 6e^{2bq}$, also $|f_3(z)| < \frac{1}{6}$.

Analog gestaltet sich die Untersuchung für negatives b und für die 3 Gebiete $x < -p$, $-q \leq y \leq q$; $y > q$, $-p \leq x \leq p$; $y < -q$, $-p \leq x \leq p$ bei reellen, von Null verschiedenen Werten von b.

Betrachten wir schliesslich den Bereich $-p \leq x \leq p$, $-q \leq y \leq q$. Da $|E(b,z)|$ über einer festen Grenze sich befindet, wie auf pag. 21 bewiesen worden ist, und für reelle Werte von b die Ungleichung besteht: $\left| e^{(\beta+ib)z} \right| < e^{\beta p + bq} < e^{p+bq}$, liegt $|f_3(z)|$ in der gesamten z-Ebene ausschliesslich der Kreise λ_ν in der Tat unter einer festen Schranke, die von β unabhängig ist.

Für den Fall $b = 0$ gilt dasselbe, denn es ist dann

$$f_3(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{z\frac{1+\beta}{2}}}{e^z - 1}\right]^2,$$ also nach § 1 für den Bezirk $\mathfrak{G}$ der z-Ebene: $|f_3(z)| < \frac{1}{2}M^2$.

Der analoge Beweis für die Funktion $\frac{e^{\pm\beta z}}{E(b,z)}$ ist leicht zu führen.

Es sei nun γ der Bedingung unterworfen $0 \leq \gamma < 1$, dann ergeben sich in ähnlicher Weise wie bei der Funktion $f_2(z)$ die Formeln:

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\pm(\gamma+ib)z}}{E(b,z)} \frac{dz}{z} = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\pm\beta z}}{E(b,z)} \frac{dz}{z} = 0. \tag{13}$$

Wenn schliesslich α ein positiver echter Bruch ist, folgt aus

$$\frac{e^{(1+\alpha+ib)z}+e^{(1+\alpha-ib)z}}{E(b,z)} = e^{\alpha z} - \frac{e^{-z(1-\alpha+ib)}+e^{-z(1-\alpha-ib}}{E(b,z)} \cdot 4e^{\alpha z}$$

durch Anwendung von (12) und (13), da $1-\alpha$ ein positiver echter Bruch ist, die Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{(1+\alpha+ib)z}+e^{(1+\alpha-ib)z}}{E(b,z)} \frac{dz}{z} = 2\pi i. \tag{14}$$

Aus ihr und (10) ergibt sich sofort:

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{(1+\alpha+ib)z}+e^{(1+\alpha-ib)z}-2}{E(b,z)} \frac{dz}{z} = 2\pi i. \tag{14a}$$

Von unerheblichen Modifikationen abgesehen, bleiben die Formeln und die Betrachtungen, die zu ihnen führen, erhalten, wenn die Zahl 4 in E(b,z) durch eine beliebige endliche Constante c ersetzt wird. Und weiter lassen sich die in diesem Paragraphen angewandten Methoden auf eine Klasse meromorpher Funktionen übertragen, deren Pole die Wurzeln transcendenter Gleichungen von folgender Form sind: $\mathfrak{Sin}\, a\, z \sin b\, z = c$, $\mathfrak{Cos}\, a\, z + \sin b\, z = 0$.

Zweiter Abschnitt.

Entwicklung willkürlicher Funktionen.

§ 4. Ableitung der Fourierschen Reihe aus einer allgemeineren.

Es seien x, x_0, x_1 positive Grössen und zwar sei $x_0 < x_1$ und $x_1 - x_0 \leq 2\pi$, die willkürliche Funktion $f(\mu)$ besitze höchstens eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen und zwischen diesen eine in dem ganzen Intervall von $\mu = x_0$ bis $\mu = x_1$ integrierbare und endliche Ableitung. Verstehen wir unter c die in § 1 eingeführte Constante und setzen

$$F(z) = \frac{c\int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{e^{2\pi z} - c},$$

$k_\nu = \frac{\lg\sqrt{a^2 + b^2} + i\,(\Theta + 2\nu\pi)}{2\pi}$, so wird $F(z)$ an der Stelle $z = k_\nu$ ausserwesentlich singulär. Nun ist

$\mathrm{Res}_{z=k_\nu} F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_1} e^{k_\nu (x-\mu)} f(\mu)d\mu$, also gilt längs der um den Punkt k_o beschriebenen Kreise K'_n mit den diskret wachsenden Radien $r'_n = n + \frac{1}{2}$ die Gleichung

$$(15)\quad \frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K'_n} F(z)dz = \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{x_0}^{x_1} e^{k_\nu (x-\mu)} f(\mu)\,d\mu,$$

sobald die Konvergenz der Residuensumme gesichert ist.

Um die Existenz des auf der linken Seite der letzten Gleichung stehenden Grenzwertes nachzuweisen und seinen Wert zu bestimmen, setzen wir

$$F_1(z) = \frac{c\int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{e^{2\pi z} - c} \qquad \text{und}$$

$$F_2(z) = \frac{c\int_{x}^{x_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{e^{2\pi z} - c},$$ so dass also $F(z)$ die Summe dieser beiden Funktionen bildet, integrieren die Zählerfunktionen von $F_1(z)$ und $F_2(z)$ partiell und integrieren die so erhaltenen 2 mal 3 Terme längs der Kreise K'_n oder vermöge der Substitution $\nu = 2\pi z$ auf den Kreisen K_n mit den Radien $r_n = \pi(2n + 1)$.

Wir wollen nun folgende 5 Fälle unterscheiden und der Reihe nach betrachten: A) $x_0 < x < x_1$, B) $x = x_0$, C) $x = x_1$, D) $x_0 < x_1 < x$, E) $x < x_0 < x_1$.

A) $x_0 < x < x_1$.

In der Gleichung

$$(15a)\quad \int_{K'_n} F_1(z)\,dz = c \int_{K_n} \frac{f(x_0)\,e^{\frac{x-x_0}{2\pi}v} - f(x) + \int_{x_0}^{x} e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v} f'(\mu)\,d\mu}{e^v - c} \frac{dv}{v}$$

erhalten wir zunächst nach Formel (1) des ersten Paragraphen:

$$c\,f(x_0) \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-x_0}{2\pi}v}}{e^v - c} \frac{dv}{v} = 0,$$

denn aus $x_1 - x_0 \leq 2\pi$ und der Ungleichheitsbedingung A) folgt $0 < \frac{x-x_0}{2\pi} < 1$. Durch Anwendung der Formel (4) von § 1 ergibt sich für den folgenden Term:

$$-c\,f(x) \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{1}{e^v - c} \frac{dv}{v} = \pi i\, f(x).$$

In dem letzten Gliede ist $\frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{v(e^v - c)}$ auf den Kreisen K_n und im Gebiete (x_0, x) eine stetige Funktion des Variablenpaares (z, μ), die Grenzen der beiden Veränderlichen sind von einander unabhängig, daher ist

$$\int_{K_n} \frac{dv}{v} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v} f'(\mu)d\mu}{e^v - c} = \int_{x_0}^{x} f'(\mu)d\mu \int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{e^v - c} \frac{dv}{v}.$$

Es sei δ eine beliebig klein gegebene positive Zahl, und in dem ganzen Gebiete von $\mu = x_0$ bis $\mu = x_1$ übertreffe die positive Grösse g den absoluten Betrag von $f'(\mu)$.

Im Intervall $x_0 \leqq \mu \leqq x-\delta$ liegt $\frac{x-\mu}{2\pi}$ über einer positiven Grenze, und zwar ist

$$\frac{\delta}{2\pi} \leqq \frac{x-\mu}{2\pi} \leqq \frac{x-x_0}{2\pi} < 1,$$

also nach (1) $\lim\limits_{n=\infty} \int\limits_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{e^v-c} \frac{dv}{v} = 0$. Da nach § 1 für diese Werte von μ der absolute Betrag der Funktion $\frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{e^v-c}$ im Gebiete $\mathfrak{G}$ der v-Ebene unter einer festen, von μ unabhängigen Schranke liegt, können wir zu einer beliebig klein gegebenen positiven Zahl ε ein n' so bestimmen, dass für jedes $n > n'$ das Integral

$\int\limits_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{e^v-c} \frac{dv}{v} = \varepsilon'$ wird, wobei $|\varepsilon'| < \varepsilon$ ist. Daraus folgt, dass

$\left| \int\limits_{x_0}^{x-\delta} f'(\mu)\, d\mu \int\limits_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{e^v-c} \frac{dv}{v} \right| < \varepsilon g\,(x-\delta-x_0) < 2\pi\varepsilon g$, also mit ε beliebig klein ist.

Im Intervall $x-\delta < \mu \leqq x$ gilt die Ungleichheitsbedingung

$$0 \leqq \frac{x-\mu}{2\pi} < \frac{\delta}{2\pi},$$

und weil nach § 1 auf den Kreisen K_n für $x-\mu > 0$ und $x-\mu = 0$ die Ungleichung $\left| \frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{e^v-c} \right| < M$ besteht, lässt sich eine positive, feste, von n unabhängige, endliche Zahl h so finden, dass $\left| \int\limits_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{e^v-c} \frac{dv}{v} \right| < h$, also $\left| \int\limits_{x-\delta}^{x} f'(\mu) d\mu \int\limits_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{e^v-c} \frac{dv}{v} \right| < \delta g h$ wird.

Daher ergibt sich:

$$\left| \int_{x_0}^{x} f'(\mu) d\mu \int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi} v}}{e^v - c} \frac{dv}{v} \right| < g(2\pi\varepsilon + \delta h),$$

und weil ε und δ beliebig klein sind, gilt die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} F_1(z)\, dz = \pi i f(x).$$

Sollte die Funktion f(x) an der gerade betrachteten Stelle x unstetig sein, so ist in obiger Gleichung f(x), wie aus unserer Entwickelung hervorgeht, durch f(x—0) zu ersetzen.

Nunmehr untersuchen wir das Integral

$$(15b) \quad \int_{K'_n} F_2(z) dz = c \int_{K_n} \frac{f(x) - f(x_1) e^{\frac{x-x_1}{2\pi} v} + \int_{x}^{x_1} e^{\frac{x-\mu}{2\pi} v} f'(\mu) d\mu}{e^v - c} \frac{dv}{v},$$

indem wir die drei Glieder der rechten Seite der Reihe nach längs der Kreise K_n integrieren.

Für $n = \infty$ wird der erste Term, wie bereits bewiesen, gleich $-\pi i f(x)$, wofern die willkürliche Funktion an der Stelle x stetig ist, gleich $-\pi i f(x+0)$, falls x eine Sprungstelle darstellt.

Aus $x_0 < x < x_1$ und $x_1 - x_0 \leqq 2\pi$ folgt $0 > \frac{x-x_1}{2\pi} > -1$,

daher ist nach (2) der Grenzwert des zweiten Gliedes:

$$-c f(x_1) \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-x_1}{2\pi} v}}{e^v - c} \frac{dv}{v} = 2\pi i f(x_1).$$

Der Grenzübergang beim dritten Term gestaltet sich ähnlich wie bei $F_1(z)$. Wir vertauschen die Integrations-

folge, was aus den nämlichen Gründen wie dort gestattet ist, und legen der Grösse δ die frühere Bedeutung bei. Dann ist in dem Gebiete $x \leqq \mu \leqq x + \delta$:

$$-\frac{\delta}{2\pi} \leqq \frac{x-\mu}{2\pi} \leqq 0.$$

Nur im Falle $x = \mu$ ist auf den Kreisen K_n: $\left|\frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{e^v - c}\right| < M$, dagegen besteht diese Ungleichung nicht für $x - \mu < 0$. Wir setzen nun $v = -w$ und abkürzungsweise $\frac{\mu - x}{2\pi} = \beta$, dann besteht die Gleichung:

$$\int_{K_n} \frac{e^{-\beta v}}{e^v - c} \frac{dv}{v} = -\frac{1}{c} \int_{K_n''} e^{\beta w} \frac{dw}{w} - \frac{1}{c^2} \int_{K_n''} \frac{e^{\beta w}}{e^w - c^{-1}} \frac{dw}{w},$$

in der die Kreise K_n'' die Abbildungen der Kreise K_n in der w-Ebene vorstellen. Folglich ist, da $\int_{K_n''} e^{\beta w} \frac{dw}{w} = 2\pi i$,

$$c \int_x^{x+\delta} f'(\mu)\, d\mu \int_{K_n} \frac{e^{-\beta v}}{e^v - c} \frac{dv}{v} = -2\pi i [f(x+\delta) - f(x)] - \frac{1}{c} \int_x^{x+\delta} f'(\mu)\, d\mu \int_{K_n''} \frac{e^{\beta w}}{e^w - c^{-1}} \frac{dw}{w}. \tag{16}$$

Hierdurch haben wir erreicht, dass der absolute Betrag von $\frac{e^{\beta w}}{e^w - c^{-1}}$ auf den Kreisen K_n'' und im Intervalle $x \leqq \mu \leqq x + \delta$ unter einer von μ unabhängigen festen Schranke liegt; folglich können wir eine positive, endliche, von n unabhängige Constante h' so bestimmen, dass

$$\left| \frac{1}{c} \int_{K_n''} \frac{e^{\beta w}}{e^w - c^{-1}} \frac{dw}{w} \right| < h', \text{ folglich}$$

$$\left| \frac{1}{c} \int_{x}^{x+\delta} f'(\mu) d\mu \int_{K_n''} \frac{e^{\beta w}}{e^w - c^{-1}} \frac{dw}{w} \right| < \delta g h' \text{ ist.}$$

Ferner gilt analog der Gleichung (16)

$$c \int_{x+\delta}^{x_1} f'(\mu) d\mu \int_{K_n} \frac{e^{-\beta v}}{e^v - c} \frac{dv}{v} = -2\pi i [f(x_1) - f(x+\delta)]$$

$$- \frac{1}{c} \int_{x+\delta}^{x_1} f'(\mu) d\mu \int_{K_n''} \frac{e^{\beta w}}{e^w - c^{-1}} \frac{dw}{w}, \tag{17}$$

wobei β im Gebiete $x + \delta < \mu \leq x_1$ der Bedingung genügt $1 > \beta > \frac{\delta}{2\pi}$, mithin ein positiver echter Bruch ist. Demnach befindet sich $\left| \frac{e^{\beta w}}{e^w - c^{-1}} \frac{dw}{w} \right|$ auf den Kreisen K_n unter einer festen Grenze, die von β, also auch von μ unabhängig ist. Nun konvergiert das Konturintegral $\int_{K_n''} \frac{e^{\beta w}}{e^w - c^{-1}} \frac{dw}{w}$ mit wachsendem n gegen Null; folglich kann zu einer beliebig klein gegebenen positiven Zahl ε ein Index n' so gefunden werden, dass für jedes $n > n'$

$$\left| \frac{1}{c} \int_{K_n''} \frac{e^{\beta w}}{e^w - c^{-1}} \frac{dw}{w} \right| < \varepsilon \text{ wird.}$$

Daher ist der absolute Betrag des zweiten Gliedes der rechten Seite von (17) kleiner als $\varepsilon g(x_1 - x - \delta)$ und a fortiori kleiner als $2\pi\varepsilon g$.

Durch Addition der beiden Gleichungen (16) und (17) folgt schliesslich:

$$c\int_{K_n}\frac{dv}{v}\int_{x}^{x_1}\frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}f'(\mu)\,d\mu}{e^{v}-c}=2\pi i\,[f(x)-f(x_1)]+\vartheta+\vartheta',$$

wobei $|\vartheta|$ mit δ, $|\vartheta'|$ mit ε beliebig klein gemacht werden können.

Wir hatten δ und ε als zwar beliebig kleine, jedoch feste positive Grössen gewählt. Lassen wir sie jetzt gegen Null konvergieren, so nähern sich auch ϑ und ϑ' dem Werte Null an, und wir erhalten für eine an der Stelle x stetige, resp. unstetige willkürliche Funktion:

$$\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}F_2(z)\,dz=\begin{cases}\pi i f(x)\\ \pi i f(x+0).\end{cases}$$

Wir setzten nun $F(z)=F_1(z)+F_2(z)$, daher ist:

$$\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}F(z)\,dz=\begin{cases}2\pi i f(x)\\ \pi i[f(x-0)+f(x+0)]\end{cases}$$

$$=i\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{x_0}^{x_1}e^{k_\nu(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu,$$

folglich

$$(18)\quad \frac{f(x)}{\underline{f(x-0)+f(x+0)}}=\begin{cases}\nu=+\infty\\ \sum\limits_{\nu=-\infty}\end{cases}\frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_1}e^{k_\nu(x-\mu)}\,f(\mu)\,d\mu.$$

Es sei speziell $c=1$; dann ist ersichtlich $k_\nu=i\nu$, und wir erhalten aus (18) sofort die Fouriersche Entwicklung:

$$(19)\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{f(x)}{\underline{f(x-0)+f(x+0)}}\\ \dfrac{}{2}\end{array}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_1}f(\mu)d\mu$$
$$+\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_1}f(\mu)\cos n(x-\mu)\,d\mu.$$

Für $x_0=0$, $x_1=2\pi$ liefert (19) die von Fourier in seiner ersten Abhandlung über Wärmeleitung gegebene Gleichung.

B) $x = x_0$.

Es sei I) $x_1 - x_0 < 2\pi$. Da im Falle $x = x_0$ die Funktion $F_1(z)$ verschwindet, folgt aus der früheren Betrachtung:

$$\frac{1}{2} f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{x}^{x_1} e^{k_\nu(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu. \tag{19a}$$

Ist II) $x_1 - x_0 = 2\pi$, so wird der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (15b) gleich $-\pi i f(x_0)$, der zweite nach Formel (5a) gleich $\pi i f(x_1)\left[2 + \frac{1}{c}\right]$, sobald n über alle Grenzen wächst. In dem dritten Term vertauschen wir die Integrationsfolge und erhalten mit Anwendung der bei der Untersuchung des Falles A) eingeführten Bezeichnung:

$$\begin{aligned} c \int_{x_0}^{x_1} f'(\mu)\, d\mu \int_{K_n} \frac{e^{-\beta v}}{e^{v} - c} \frac{dv}{v} &= -2\pi i [f(x_1) - f(x_0)] \\ -\frac{1}{c} \int_{x_0}^{x_1} f'(\mu)\, d\mu \int_{K_n''} \frac{e^{\beta w}}{e^{w} - c^{-1}} \frac{dw}{w}&. \end{aligned} \tag{20}$$

Das Integrationsintervall teilen wir in die drei Intervalle $x_0 \leqq \mu \leqq x_0 + \delta$, $x_0 + \delta < \mu \leqq x_1 - \delta$ und $x_1 - \delta < \mu \leqq x_1$, so dass in dem ersten $0 \leqq \beta \leqq \frac{\delta}{2\pi}$, in dem zweiten $\frac{\delta}{2\pi} < \beta \leqq 1 - \frac{\delta}{2\pi}$, also β ein positiver echter Bruch ist, während β in dem dritten die Bedingung erfüllt: $1 - \frac{\delta}{2\pi} < \beta \leqq 1$; daher lässt sich der absolute Betrag eines jeden der drei Integrale, in welche wir das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (20) gespalten haben, nach früherem unter jeden vorgeschrieben kleinen positiven Wert herabdrücken. Folglich ist in (19a) die linke Seite durch $\frac{f(x_0) + c^{-1} f(x_1)}{2}$ zu ersetzen.

C) $x = x_1$.

Wenn $x_1 - x_0 < 2\pi$ ist, ergibt sich aus $F(z) \equiv F_1(z)$:

$$(21) \qquad \frac{1}{2} f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x} e^{k_\nu(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu.$$

Ist aber $x_1 - x_0 = 2\pi$, so wird der Grenzwert des ersten Terms in Gleichung (15a) nach Formel (5) gleich $c\pi i f(x_0)$, und da die beiden anderen Glieder dieselben Beträge liefern wie im Falle $x_1 - x_0 < 2\pi$, so ist der Wert der Reihe (21) für $x_1 - x_0 = 2\pi$ dargestellt durch $\frac{c f(x_0) + f(x_1)}{2}$.

D) $x_0 < x_1 < x$.

Ist I) $x - x_0 < 2\pi$, so ist a fortiori $x - x_1 < 2\pi$, folglich sind die beiden ersten Terme auf der rechten Seite der Gleichung

$$(22) \qquad \int_{K'_n} F(z)dz = c \int_{K_n} \frac{f(x_0)\, e^{\frac{x-x_0}{2\pi}\nu} - f(x_1)\, e^{\frac{x-x_1}{2\pi}\nu} + \int_{x_0}^{x_1} e^{\frac{x-\mu}{2\pi}\nu} f'(\mu)d\mu}{e^{\nu} - c} \frac{dv}{v}$$

gleich Null für $n = \infty$. Da ferner in dem ganzen Intervall von $\mu = x_0$ bis $\mu = x_1$ die Grösse $\frac{x-\mu}{2\pi}$ ein positiver echter Bruch ist, folgt leicht, dass $\lim_{n=\infty} \int_{K'_n} F(z)\, dz$ gegen Null konvergiert.

Wenn II) $x - x_0 = 2\pi$ angenommen wird, erhalten wir für den Grenzwert des ersten Gliedes $\pi i c f(x_0)$, der Grenzwert des zweiten verschwindet, weil $0 < \frac{x - x_1}{2\pi} < 1$. In dem dritten Term folgt durch Vertauschung der Integrationsfolge und durch Spaltung des Gebietes (x_0, x_1) in die Teilintervalle $(x_0, x_0 + \delta)$ und $(x_0 + \delta, x_1)$, dass die absoluten Beträge der zugehörigen Doppelintegrale beliebig klein gemacht werden können. Daher ist der Wert der Reihe in (18) repräsentiert durch $\frac{1}{2} f(x_0)$.

E) $x < x_0 < x_1$.

Die beiden ersten Terme in (22) geben für $n = \infty$ sobald $x_1 - x < 2\pi$ die Werte $-2\pi i f(x_0)$ und $2\pi i f(x_1)$ nach Formel (2). Weil ferner die Gleichung gilt:

$$c\int_{x_0}^{x_1} f'(\mu)\,d\mu \int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2\pi}v}}{e^v - c}\,\frac{dv}{v} = 2\pi i[f(x_0) - f(x_1)]$$

$$-\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1} f'(\mu)\,d\mu \int_{K''_n} \frac{e^{\frac{\mu-x}{2\pi}w}}{e^w - c^{-1}}\,\frac{dw}{w},$$

und das letzte Glied der rechten Seite dieser Gleichung dem absoluten Betrage nach unter jeden vorgeschrieben kleinen positiven Wert herabgedrückt werden kann, gilt gleiches von $\lim_{n=\infty} \int_{K'_n} F(z)\,dz$.

Wenn schliesslich $x_1 - x = 2\pi$ vorausgesetzt wird, lässt sich leicht zeigen, dass der Wert der Reihe (18) durch $\frac{f(x_1)}{2c}$ repräsentiert wird.

Von der Funktion $\frac{e^{2\pi z}}{c} F(z)$ ausgehend, wären wir notwendig zu denselben Resultaten gelangt, die sich aus $F(z)$ ergaben, denn bei beiden Funktionen sind die Residuen dieselben. Meromorphe Funktionen dieser Art, deren Residuensumme also gleich ist, wollen wir im folgenden kongruent in Bezug auf ihre Residuensumme nennen.

Anm. Wird anstelle der Funktion $F(z)$ die zu ihr kongruente Funktion der Untersuchung zu Grunde gelegt, so leistet die bisher unbenutzte Formel (6) bei der Durchführung der Rechnung nützliche Dienste.

§ 5. Entwicklungen allgemeinerer Art.

Es mögen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ ganze rationale Funktionen von gleichem Grade bedeuten; die willkürliche Funktion besitze dieselbe Eigenschaft wie in § 4, und es bestehe zwischen den positiven Grössen x, x_0, x_1, a die Bedingung:

$$0 < x - x_0 < x_1 - x_0 \leqq 2a,$$

die dem Falle A) des vorigen Paragraphen entspricht.

Wir setzen $\Phi_1(z) = \dfrac{e^{az}\varphi(z)\int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)d\mu}{e^{az}\varphi(z) - e^{-az}\psi(z)}$, scheiden die Nullstellen der Gleichungen $\varphi(z) = 0$, $\psi(z) = 0$ und $e^{2az} = \dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ durch Kreise von beliebig klein und constant gewähltem Radius von der z-Ebene aus und transformieren das bestimmte Integral durch partielle Integration. Mittelst der Substitution $2az = v$ mögen die Kreise K'_n, auf denen $\Phi_1(z)$ nirgends polare Singularitäten aufweist, übergehen in die Kreise K_n; dann erhalten wir:

$$\int_{K'_n} \Phi_1(z)\,dz = \int_{K_n} \frac{e^{v}\left[f(x_0)\,e^{\frac{x-x_0}{2a}v} - f(x) + \int_{x_0}^{x} e^{\frac{x-\mu}{2a}v} f'(\mu)d\mu\right]}{e^{v} - S(v)} \frac{dv}{v},$$

wobei $S(v) = \dfrac{\psi\left(\frac{v}{2a}\right)}{\varphi\left(\frac{v}{2a}\right)}$ gesetzt ist.

Der erste Term wird mit wachsendem n gleich $2\pi i f(x_0)$. In der Tat, es ist $\dfrac{x-x_0}{2a}$ ein positiver echter Bruch, und $\lim_{n=\infty} S(v)$ gleich einer endlichen, von Null verschiedenen Zahl, also folgt:

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\left[1+\frac{x-x_0}{2a}\right]v}}{e^v - S(v)} \frac{dv}{v} = 2\pi i + \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{S(v)\, e^{\frac{x-x_0}{2a}v}}{e^v - S(v)} \frac{dv}{v}$$

und hieraus, da nach Formel (7) von § 2 der Grenzwert auf der rechten Seite verschwindet, die Behauptung. Für den zweiten Term gilt nach § 2 und Formel (5):

$$-f(x) \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^v}{e^v - S(v)} \frac{dv}{v} = -\pi i f(x).$$

Mit Beibehaltung der Bezeichnungen von § 4 erhalten wir bei dem dritten Gliede:

$$\int_{K_n} \frac{dv}{v} \frac{\int_{x_0}^{x} e^{\left[1+\frac{x-\mu}{2a}\right]v} f'(\mu)\, d\mu}{e^v - S(v)} = 2\pi i [f(x) - f(x_0)]$$

$$+ \int_{x_0}^{x} f'(\mu)\, d\mu \int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2a}v} S(v)}{e^v - S(v)} \frac{dv}{v}.$$

Nun ist in dem Gebiete $x_0 \leqq \mu \leqq x-\delta$ die Grösse $\frac{x-\mu}{2a}$ ein positiver echter Bruch, und da nach § 2 der absolute Betrag der Funktion $\frac{e^{\frac{x-\mu}{2a}v} S(v)}{e^v - S(v)}$ auf den Kreisen K_n unter einer von μ unabhängigen festen positiven Grenze liegt, ferner $\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2a}v} S(v)}{e^v - S(v)} \frac{dv}{v}$ in dem Integrationsintervall $x_0 \leqq \mu \leqq x - \delta$ verschwindet, können wir zu einer vorgegebenen, beliebig kleinen positiven Zahl ε einen Index n' so finden, dass für ein n, welches n' übertrifft,

$\left|\int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2a}v} S(v)}{e^v - S(v)} \frac{dv}{v}\right| < \varepsilon$ wird. Demnach ist

$$\left|\int_{x_0}^{x-\delta} f'(\mu)\, d\mu \int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2a}v} S(v)}{e^v - S(v)} \frac{dv}{v}\right| < 2\varepsilon a g,$$

also beliebig klein.

In dem ganzen Bereich $x - \delta < \mu \leqq x$ und auf den Kreisen K_n ist nach § 2 die Grösse $\left|\int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2a}v} S(v)}{e^v - S(v)} \frac{dv}{v}\right|$ kleiner als eine von n unabhängige positive Constante h, also ist

$$\left|\int_{x-\delta}^{x} f'(\mu)\, d\mu \int_{K_n} \frac{e^{\frac{x-\mu}{2a}v} S(v)}{e^v - S(v)} \frac{dv}{v}\right| < \delta g h,$$ mithin mit δ beliebig klein.

Folglich konvergiert $\lim_{n=\infty} \int_{K'_n} \Phi_1(z)dz$ gegen $\pi i f(x)$ bzw. gegen $\pi i f(x-0)$, sobald x Sprungstelle ist.

Setzen wir $\Phi_2(z) = \frac{e^{az}\varphi(z)\int_x^{x_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{e^{az}\varphi(z) - e^{-az}\psi(z)}$, so ergibt sich

$$\int_{K'_n} \Phi_2(z)dz = \int_{K_n} \frac{e^v \left[f(x) - f(x_1) e^{\frac{x-x_1}{2a}v} + \int_x^{x_1} e^{\frac{x-\mu}{2a}v} f'(\mu)d\mu\right]}{e^v - S(v)} \frac{dv}{v}.$$

Wie bereits gezeigt wurde, liefert das erste Glied für $n=\infty$ den Betrag $\pi i f(x)$, der Grenzwert des zweiten Terms ver-

schwindet, denn $1 + \frac{x-x_1}{2a}$ ist ein positiver echter Bruch, und weil der absolute Betrag des Doppelintegrals sich beliebig klein machen lässt, nähert sich $\lim_{n=\infty} \int_{K'_n} \Phi_2(z)dz$ dem Werte $\pi i f(x)$, bezüglich $\pi i f(x+0)$ an. Also besteht die Gleichung:

$$(23)\ \frac{1}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \int_{K'_n} \frac{e^{az}\varphi(z)\int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{e^{az}\varphi(z) - e^{-az}\psi(z)}\,dz = \begin{cases} f(x) \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \end{cases}.$$

Wie die Fälle B) bis E), die wir in § 4 unterschieden haben, bei der Funktion $\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ zu untersuchen sind, liegt unmittelbar auf der Hand.

Setzen wir in (23) speziell $\varphi(z) = \psi(z)$, so ergibt sich die Fouriersche Entwicklung

$$\left.\begin{matrix} f(x) \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x_1} f(\mu)d\mu + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{x_0}^{x_1} f(\mu)\cos\frac{n\pi(x-\mu)}{a}d\mu,$$

die für $a = \pi$ in Gleichung (19) übergeht.

Von nun an wollen wir den Ausdruck $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ nicht mehr hinzufügen, und unter $f(x)$ in unzweideutigen Fällen sowohl $f(x)$ als auch obigen Ausdruck verstehen.

Es sei $\varphi(z) = -\psi(z)$, dann folgt aus (23):

$$f(x) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{n=\infty}\int_{x_0}^{x_1} f(\mu)\cos\left[\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-\mu)\right]d\mu;$$

wenn ferner $\psi(z) = e^{2ab}\varphi(z)$ gesetzt wird, bekommen wir die Cauchysche Entwicklung[1]):

$$f(x) = \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x_1} e^{b(x-\mu)} f(\mu)d\mu + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{x_0}^{x_1} e^{b(x-\mu)}\cos\frac{n\pi(x-\mu)}{a} f(\mu)d\mu,$$

[1]) Oeuvres de Cauchy (2), t. VII p. 412.

die sich für rein imaginäres oder komplexes b, wenn b wie oben eine Konstante bedeutet, durch Trennung von Reellem und Imaginärem in zwei Gleichungen spaltet.

Ersetzen wir in (23) die unter dem Konturintegralzeichen stehende Funktion durch die zu ihr in Bezug auf die Residuensumme kongruente, so folgt leicht:

$$(24)\qquad \frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{e^{az}\psi(-z)\int_{x_0}^{x_1}e^{-z(x-\mu)}f(\mu)d\mu}{e^{az}\psi(-z)-e^{-az}\varphi(-z)}\,dz = f(x).$$

Die letzte Gleichung als Folge von (23) ist gültig für $x_1 - x_0 \leqq 2a$. Aus dem Beweise der Entwicklung (23) geht hervor, dass diese erhalten bleibt unter der Annahme $x_1 - x_0 \leqq a$, also lässt sich von (24) dasselbe aussagen.

Es sei jetzt entsprechend $0 < x - x_0 < x_1 - x_0 \leqq a$, dann ist:

$$(25)\qquad \frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{e^{az}\varphi(z)\int_{x_0}^{x_1}e^{-z(x+\mu-2x_0)}f(\mu)d\mu}{e^{az}\psi(z)-e^{-az}\psi(z)}\,dz = 0.$$

In der Tat, setzen wir $2az = v$, so sind in den drei Zählerfunktionen $e^{\left[1-\frac{x-x_0}{2a}\right]v}$, $e^{\left[1-\frac{x-x_0}{2a}-\frac{x_1-x_0}{2a}\right]v}$, $e^{\left[1-\frac{x-x_0}{2a}-\frac{\mu-x_0}{2a}\right]v}$ die Faktoren von v in dem ganzen Bereich von $\mu = x_0$ bis $\mu = x_1$ positive echte Brüche, woraus sich nach früherem die Behauptung ergibt.

Aus (25) folgt durch Substitution des kongruenten Integranden:

$$(26)\qquad \frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{e^{az}\psi(-z)\int_{x_0}^{x_1}e^{z(x+\mu-2x_0)}f(\mu)\,d\mu}{e^{az}\psi(-z)-e^{-az}\varphi(-z)}\,dz = 0,$$

durch Addition und Subtraktion von (23) und (25):

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{e^{az}\varphi(z)\left[e^{z(x-x_0)}\pm e^{-z(x-x_0)}\right]\int_{x_0}^{x_1}e^{-z(\mu-x_0)}f(\mu)\,d\mu}{e^{az}\varphi(z)-e^{-az}\psi(z)}\,dz$$

(27)
$$= f(x),$$

durch Addition und Subtraktion von (24) und (26) oder aus (27) folgt:

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{e^{az}\psi(-z)\left[e^{-z(x-x_0)}\pm e^{z(x-x_0)}\right]\int_{x_0}^{x_1}e^{z(\mu-x_0)}f(\mu)\,d\mu}{e^{az}\psi(-z)-e^{-az}\varphi(-z)}\,dz$$

(28)
$$= f(x).$$

Wenn wir in (27) oder (28) $\varphi(z)=\psi(z)$, $x_0=0$, $x_1=a$ setzen, erhalten wir die Entwicklungen

$$(29)\qquad f(x)=\frac{1}{a}\int_0^a f(\mu)d\mu+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos\frac{\pi n x}{a}\int_0^a\cos\frac{\pi n\mu}{a}f(\mu)\,d\mu,$$

$$(30)\qquad f(x)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin\frac{\pi n x}{a}\int_0^a\sin\frac{\pi n\mu}{a}f(\mu)\,d\mu,$$

die von physikalischer Bedeutung sind, und zwar (29) für die Fortpflanzung von Wellen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit in einem Kanal, ferner für den longitudinal schwingenden Stab, (30) für die Theorie der schwingenden Saite.

Für $\varphi(z)=-\psi(z)$, $x_0=0$, $x_1=\frac{a}{2}=\frac{\pi}{2}$ liefert (27) oder (28) die Reihen, welche Poisson im „Journal de l'École Polytechnique“ (cah. 18), p. 425 zuerst entwickelt hat.

In Gleichung (28) denken wir uns $\varphi(-z)$ durch $\psi(z)$, $\psi(-z)$ durch $\varphi(z)$ ersetzt und erhalten vermöge (27) die Gleichungen:

$$\frac{1}{4\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{e^{az}\varphi(z)\left[e^{z(x-x_0)}+e^{-z(x-x_0)}\right]\int_{x_0}^{x_1}\left[e^{z(\mu-x_0)}+e^{-z(\mu-x_0)}\right]f(\mu)d\mu}{e^{az}\varphi(z)-e^{-az}\psi(z)}$$

(31) $$= f(x),$$

$$\frac{1}{4\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{e^{az}\varphi(z)\left[e^{z(x-x_0)}-e^{-z(x-x_0)}\right]\int_{x_0}^{x_1}\left[e^{-z(\mu-x_0)}-e^{z(\mu-x_0)}\right]f(\mu)d\mu}{e^{az}\varphi(z)-e^{-az}\psi(z)}$$

(32) $$= f(x).$$

Bezeichnet b eine beliebige endliche Constante, so ist

$$\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{\varphi(z)\psi(z)e^{az+(b-z)(x-x_0)}\int_{x_0}^{x_1}e^{-z(\mu-x_0)}f(\mu)d\mu}{\varphi(b-z)\psi(z)e^{az}-\varphi(z)\psi(b-z)e^{a(b-z)}}dz=0 \quad (33)$$

nach Gleichung (25), da (25) auch gilt, wenn $\varphi(z)$ im Zähler des Integranden durch eine rationale Funktion von gleichem Grade ersetzt wird. Denken wir uns jetzt in (23) die Funktion $\varphi(z)$ durch $\varphi(b-z)\,\psi(z)$, die Funktion $\psi(z)$ durch $\varphi(z)\psi(b-z)\,e^{ab}$ vertreten, so erhalten wir mit Hilfe von (33):

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{\left[\varphi(b-z)e^{z(x-x_0)}-\varphi(z)e^{(b-z)(x-x_0)}\right]e^{az}\psi(z)\int_{x_0}^{x_1}e^{-z(\mu-x_0)}f(\mu)d\mu}{\varphi(b-z)\psi(z)e^{az}-\varphi(z)\psi(b-z)e^{a(b-z)}}$$

$$= f(x).$$ Hieraus folgt

$$\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{\left[e^{z(x-x_0)}\varphi(b-z)-e^{(b-z)(x-x_0)}\varphi(z)\right]\int_{x_0}^{x_1}f(\mu)d\mu\left[e^{z(a+x_0-\mu)}\psi(z)-e^{(b-z)(a+x_0-\mu)}\psi(b-z)\right]}{2\left[\varphi(b-z)\psi(z)e^{az}-\varphi(z)\psi(b-z)e^{a(b-z)}\right]}$$

(34) $$= 2\pi i f(x).$$

Von der letzten Gleichung wollen wir eine wichtige Anwendung machen[1]). Es sei $b=0$, $\varphi(z)=A-z$, $\psi(z)=B-z$, wobei A und B positive Constanten bedeuten mögen. Durch die Substitution $z=iv$ gehen die Kreise K'_n in die Kreise K_n über und demnach (34) in:

$$\frac{1}{\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K_n}\frac{\left[v\cos v(x-x_0)+A\sin v(x-x_0)\right]\int_{x_0}^{x_1}\left[v\cos(x_1-\mu)v+B\sin(x_1-\mu)v\right]f(\mu)d\mu}{(v^2-AB)\sin av-(A+B)v\cos av}dv$$

$$=f(x).$$

Die meromorphe Funktion unter dem Konturintegralzeichen besitzt Pole für alle Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{tg} av=\frac{(A+B)v}{v^2-AB}$$ mit Ausnahme der Wurzel $v=0$. Da A, B und a sämtlich positiv sind, hat die Gleichung nur reelle und zwar unendlich viele, paarweise entgegengesetzte Lösungen, wie Cauchy in § 4 seiner Untersuchung „Sur la nature des racines de quelques équations transcendantes“, Oeuvres (2), VI bewiesen hat. Es seien $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n, \ldots$ die nach ihrer Grösse geordneten positiven Wurzeln, $\tau_{-1}, \tau_{-2}, \ldots \tau_{-n}, \ldots$ die ihnen entsprechenden negativen, so dass also $\tau_{-n}=-\tau_n$ ist. Die Zählerfunktion des Integranden in (35) ist in Bezug auf v gerade, die Nennerfunktion ungerade. Wenn wir daher den Integranden gleich $Q(v)$ und $\operatorname{Res}_{v=\tau_n} Q(v)=Q_1(\tau_n)$ setzen, so ist $Q_1(\tau_{-n})=Q_1(-\tau_n)$ $=Q_1(\tau_n)$. Demnach erhalten wir aus (35) die Entwicklung:

---

[1]) Cauchy, Mémoire sur l'application du calcul des résidus, p. 20.

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\left[\tau_n\cos(x-x_0)\tau_n+A\sin(x-x_0)\tau_n\right]\int_{x_0}^{x_1}\left[\tau_n\cos(x_1-\mu)\tau_n+B\sin(x_1-\mu)\tau_n\right]f(\mu}{\left[a(\tau_n^2-AB)-(A+B)\right]\cos a\tau_n+\left[a(A+B)+2\right]\tau_n\sin a\tau_n}$$

Diese tritt auf bei der Wärmeleitung in einem Metallstabe von unendlich kleinen Querdimensionen, wenn die Enden den Abscissen x_0, $x_1 = a + x_0$ entsprechen und die Temperatur u zur Zeit t den Grenzbedingungen

$$Au - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{x=x_0} = 0,\quad Bu + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{x=x_1} = 0$$ und der Anfangsbedingung $u\big|^{t=0} = f(x)$ genügt.

---

§ 6. Reihendarstellung beim Problem der radial sich abkühlenden Kugel.

Herr Prof. Kneser gibt in seinen „Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik“ [1]) dem durch die Grenzbedingungen $u\big|^0 = 0$, $u' + au\big|^\pi = 0$ bestimmten Integral der Differentialgleichung $u'' + z^2u + f(x) = 0$ die Gestalt

$$u = p(x) - \sin zx\,\frac{p'(\pi) + ap(\pi)}{\omega(z)}. \tag{36}$$

Hierin ist $p(x) = \frac{1}{z}\int_0^x f(\mu)\sin z(\mu - x)\,d\mu$,

$\omega(z) = z\cos z\pi + a\sin z\pi$ und a eine positive, endliche Konstante.

Aus $p'(x) = -\int_0^x f(\mu)\cos z(\mu - x)\,d\mu$ folgt zunächst

---

[1]) Mathem. Annalen, Bd. 58, S. 101 und ff.

$$p'(\pi) + ap(\pi) = -\frac{\omega(z)}{z}\int_0^{\pi} f(\mu)\cos z\mu\, d\mu$$

$$+\frac{a\cos z\pi - z\sin z\pi}{z}\int_0^{\pi} f(\mu)\sin z\mu\, d\mu.$$

Setzen wir diesen Wert in (36) ein und verstehen unter $K_1, K_2, \ldots K_n, \ldots$ um den Nullpunkt der z-Ebene beschriebene Kreise, so erhalten wir:

$$-\frac{1}{2}\int_{K_n} u\,d(z^2) = \int_{K_n} \sin zx \cdot \frac{(a\cos z\pi - z\sin z\pi)\int_0^{\pi} f(\mu)\sin z\mu\, d\mu}{\omega(z)}\, dz$$

durch Anwendung des bekannten Satzes aus der Theorie der holomorphen Funktionen.

Wir wollen die auf der rechten Seite der letzten Gleichung unter dem Konturintegral befindliche Funktion mit G(z) bezeichnen und mit ihrer Hilfe die Möglichkeit der Entwicklung einer willkürlichen Funktion in einer Reihe, wie sie bei dem Problem der radial sich abkühlenden Kugel auftritt, nachweisen.

Die Gleichung $\omega(z) = 0$ besitzt ausser der Lösung $z = 0$, bei der jedoch G(z) keinen Pol aufweist, unendlich viele reelle, paarweise entgegengesetzt auftretende Wurzeln, hingegen weder rein imaginäre noch eigentlich komplexe Nullstellen, da wir a als positive Grösse angenommen haben[1]). Die positiven Wurzeln seien $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n, \ldots$, die negativen $\rho_{-1}, \rho_{-2}, \ldots \rho_{-n}, \ldots$ und zwar so geordnet, dass $\rho_{-n} = -\rho_n$ ist. Dann folgt aus einer im vorigen Paragraphen durchgeführten, hier analogen Betrachtung:

(37) $$\operatorname*{Res}_{z=\rho_n} G(z) = \operatorname*{Res}_{z=\rho_{-n}} G(z), \text{ da}$$

[1]) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, Bd. II, § 53.

$$\operatorname*{Res}_{z=\rho_n} G(z) = \sin\rho_n x \frac{a\cos\rho_n\pi - \rho_n\sin\rho_n\pi}{(1+a\pi)\cos\rho_n\pi - \rho_n\pi\sin\rho_n\pi} \int_0^\pi f(\mu)\sin\rho_n\mu\,d\mu.$$

Es befriedigt nun ρ_n die Gleichung $\omega(z) = 0$, folglich ist einerseits:

$$\frac{a\cos\rho_n\pi - \rho_n\sin\rho_n\pi}{(1+a\pi)\cos\rho_n\pi - \rho_n\pi\sin\rho_n\pi} = \frac{a - \rho_n\operatorname{tg}\rho_n\pi}{1 + a\pi - \rho_n\pi\operatorname{tg}\rho_n\pi} = \frac{a^2+\rho_n^2}{a+\pi(a^2+\rho_n^2)},$$

andererseits gilt[1]):

$$2\int_0^\pi \sin^2\rho_n\mu\,d\mu = \pi - \frac{\sin 2\rho_n\pi}{2\rho_n} = \pi - \frac{1}{\rho_n}\frac{\operatorname{tg}\rho_n\pi}{1+\operatorname{tg}^2\rho_n\pi}$$

$$= \pi + \frac{a}{a^2+\rho_n^2} = \frac{a+\pi(a^2+\rho_n^2)}{a^2+\rho_n^2}, \text{ daher ergibt sich:}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\rho_n} G(z) = \frac{1}{2}\frac{\int_0^\pi f(\mu)\sin\rho_n\mu\,d\mu}{\int_0^\pi \sin^2\rho_n\mu\,d\mu}\sin\rho_n x.$$

Also gilt durch Berücksichtigung von (37) die Gleichung:

$$(38)\quad \lim_{n=\infty}\int_{K_n} G(z)\,dz = 2\pi i \sum_{n=\infty}^{n=1} \frac{\int_0^\pi f(\mu)\sin\rho_n\mu\,d\mu}{\int_0^\pi \sin^2\rho_n\mu\,d\mu}\sin\rho_n x.$$

Um die Existenz des links stehenden Grenzwertes zu erweisen und seinen Wert zu ermitteln, setzen wir $z = iv$, wodurch die Kreise K_n, auf denen kein Pol von $G(z)$ liegt,

---

[1]) cf. Riemann-Weber, l. c. § 54.

in die Kreise K'_n übergehen mögen. Es sei $\varphi(v) = a + v$ und $S(v) = \frac{\varphi(-v)}{\varphi(v)}$, dann ergibt eine einfache Rechnung:

$$\frac{a\cos\pi z - z\sin\pi z}{\omega(z)} = -i\frac{e^{v\pi}\varphi(v) + e^{-v\pi}\varphi(-v)}{e^{v\pi}\varphi(v) - e^{-v\pi}\varphi(-v)} = -i\frac{e^{2v\pi} + S(v)}{e^{2v\pi} - S(v)}.$$

Mit dem beliebig kleinen, fest gewählten Radius η beschreiben wir Kreise um die Wurzeln der Gleichung $e^v = S(v)$, die Punkte $\pm a$ und die Stellen $v_\nu = (2\nu + 1)\pi i$. Sobald $|v|$ eine hinreichend grosse Schranke $\mathfrak{R}$ überschritten hat, konvergiert $S(v)$ gegen -1, folglich liegen nach § 2 die Nullstellen dieser Gleichung für $|v| > \mathfrak{R}$ im Innern der um v_ν mit η beschriebenen Kreise. Ist daher der Radius r_n des Kreises K'_n oder K_n gleich $2n\pi$, so wird $G(z)$ auf K'_n und K_n nicht ausserwesentlich singulär.

Berücksichtigen wir die Kongruenz der Funktionen $\frac{e^{2\pi v}}{e^{2\pi v} - S(v)}$ und $\frac{S(v)}{e^{2\pi v} \cdot S(v)}$ bezüglich der Residuensumme, so folgt leicht die Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} G(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \int_{K'_n} \frac{e^{2\pi v} \int_0^\pi f(\mu)\left[e^{v(x-\mu)} + e^{v(x-\mu)} \cdot e^{-(x+\mu)v} - e^{(x+\mu)v}\right] d\mu}{e^{2\pi v} - S(v)} \cdot dv.$$

Es bestehe die Bedingung $0 < x < \pi$; dann ist der erste Term auf der rechten Seite nach Gleichung (23) gleich $\pi i f(x)$, wie sofort erhellt, wenn in (23) die meromorphe Funktion unter dem Konturintegralzeichen mit $\frac{e^{xz}}{\varphi(z)}$ erweitert wird. Ebenso ergibt sich für den zweiten Term nach (24) der Wert $\pi i f(x)$, während der dritte und vierte Term, wie aus

(25) und (26) hervorgeht, verschwindet. Folglich erhalten wir aus (38) das Ergebnis:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\int_0^\pi f(\mu) \sin \rho_n \mu \, d\mu}{\int_0^\pi \sin^2 \rho_n \mu \, d\mu} \sin \rho_n x.$$

Wollen wir die willkürliche Funktion in eine Reihe von der Form $\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos \sigma_n x$ entwickeln, wenn $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung

(39) $z \sin \pi z - a \cos \pi z = 0$ sind, so werden wir statt der allgemeinen Gleichung (34) zweckmässig (35) zum Ausgangspunkt wählen. Ersetzen wir in (35) die Grössen B und a durch a und π und setzen $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$, $A = 0$, so geht die Gleichung (35a) in (39) über, deren Wurzeln in diesem speciellen Falle dieselben Eigenschaften besitzen wie im allgemeinen, sofern B eine positive endliche Grösse ist, (Cauchy, (2) VI. p. 362.). Auf den Fall $B < 0$ wollen wir später noch zurückkommen. Es bezeichne $\sigma_{-n} = -\sigma_n$ die nte negative Wurzel von (39) für positives a, H(v) den Integranden in (35) für die gewählten speziellen Constanten; dann ist

$$\operatorname{Res}_{v=\sigma_n} H(v) = \operatorname{Res}_{v=\sigma_{-n}} H(v)$$

$$= \frac{\cos \sigma_n x \int_0^\pi f(\mu) [\sigma_n \cos(\pi - \mu)\sigma_n + a \sin(\pi - \mu)\sigma_n] \, d\mu}{(1 + a\pi) \sin \pi\sigma_n + \pi\sigma_n \cos \pi\sigma_n}$$

$$= \frac{a^2 + \sigma_n^2}{a + \pi(a^2 + \sigma_n^2)} \cos \sigma_n x \int_0^\pi f(\mu) \cos \sigma_n \mu \, d\mu,$$

weil $\sin \pi\sigma_n = \frac{a}{\sigma_n} \cos \pi\sigma_n$. Aus demselben Grunde ist

$$2\int_0^{\pi}\cos^2\sigma_n\mu\,d\mu = \pi + \frac{1}{\sigma_n}\frac{tg\sigma_n\pi}{1+tg^2\sigma_n\pi} = \frac{a+\pi(a^2+\sigma_n^2)}{a^2+\sigma_n^2},$$

folglich

$$\text{(39a)}\qquad \operatorname*{Res}_{v=\sigma_n} H(v) = \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^{\pi} f(\mu)\cos\sigma_n\mu\,d\mu}{\int_0^{\pi}\cos^2\sigma_n\mu\,d\mu}\cos\sigma_n x,$$

mithin nach (35) für $0 < x < \pi$ in der Tat:

$$\text{(40)}\qquad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\int_0^{\pi} f(\mu)\cos\sigma_n\mu\,d\mu}{\int_0^{\pi}\cos^2\sigma_n\mu\,d\mu}\cos\sigma_n x.$$

Um den Fall $B < 0$ zu betrachten, wollen wir von der Gleichung

$$\text{(41)}\qquad Z \equiv z\sin\pi z + a\cos\pi z = 0$$

ausgehen, wobei also a eine positive Konstante bedeutet. Ersichtlich müssen alle Nullstellen, sobald ihre Existenz nachgewiesen ist, paarweise entgegengesetzt vorkommen. Läuft z von $\nu-\frac{1}{2}$ bis $\nu+\frac{1}{2}$, so geht $\overline{Z} \equiv tg\pi z+\frac{a}{z}$ mindestens einmal durch Null hindurch. Da a positiv ist, liegt in jedem Intervalle von $k+\frac{1}{2}$ bis $k+1$, sofern k eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet, wenigstens eine positive, in jedem Intervalle von $-(k+\frac{1}{2})$ bis $-(k+1)$ wenigstens eine negative Wurzel. Da die positiven Lösungen die negativen ohne weiteres liefern, brauchen wir nur die ersteren zu untersuchen.

Wenn zwischen $k+\frac{1}{2}$ und $k+1$ mehr als eine Nullstelle läge, so wären es mindestens drei an der Zahl, also müsste dort

$$\frac{dZ}{dz} = \pi z \cos \pi z + (1 - a\pi) \sin \pi z$$

wenigstens zweimal verschwinden.

Es sei 1) die Differenz $1 - a\pi = 0$; dann wird $\frac{dZ}{dz}$ in dem betrachteten Gebiet nur einmal gleich Null, nämlich an der Stelle $k+\frac{1}{2}$.

Wenn 2) die Grösse $1 - a\pi < 0$ ist, so folgt aus $\frac{dZ}{dz} = 0$ die Gleichung

$$\operatorname{tg} \pi z + \frac{\pi z}{1 - a\pi} = 0.$$

Nun ist die Tangente zwischen $z = k + \frac{1}{2}$ und $z = k+1$ negativ, mithin ist in diesem Falle keine Nullstelle der Ableitung vorhanden.

Ist 3) die Konstante $1 - a\pi$ positiv, so verschwindet die Ableitung in dem Intervalle nur einmal[1]).

Folglich liegt zwischen $z = k+\frac{1}{2}$ und $z = k+1$ eine und nur eine positive Wurzel der Gleichung (41).

Setzen wir $z = iy$, wobei y reell ist, so folgt die Existenz rein imaginärer Wurzeln[2]) von (41) aus dem Bestehen der Gleichung $\mathfrak{Tg}\, \pi y = \frac{a}{y}$, wenn unter $\mathfrak{Tg}$ die hyperbolische Tangente verstanden wird.

Wenn schliesslich $z = x + iy$ gesetzt wird, erhalten wir aus (41):

---

[1]) Riemann-Weber, II, § 53.
[2]) Cauchy, (2), VI, p. 363.

$$\frac{2\sin 2\pi x + i\left(e^{2\pi y} - e^{-2\pi y}\right)}{e^{2\pi y} + 2\cos 2\pi x + e^{-2\pi y}} = -a\,\frac{x - iy}{x^2 + y^2} \qquad \text{oder}$$

$$\frac{e^{2\pi y} - e^{-2\pi y}}{4\pi y} = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}.$$ Da diese Gleichung für von Null verschiedene Werte der reellen Variabelen x und y unmöglich ist, besitzt (41) keine eigentlich komplexen Wurzeln.

Wenn wir jetzt die Funktion

$$H_1(z) = \cos xz\,\frac{z\cos\pi z - a\sin\pi z}{z\sin\pi z + a\cos\pi z}\int_0^{\pi} f(\mu)\cos z\mu\,d\mu,$$

deren Pole durch die reellen und rein imaginären Wurzeln der Gleichung (41) gegeben sind, in derselben Weise wie die Funktionen G(z) und H(v) untersuchen, erhalten wir die Entwicklung der willkürlichen Funktion in eine Reihe, die formal mit der Reihe (40) übereinstimmt.

---

§ 7. Die Entwicklung beim Problem der lateralen Schwingungen eines elastischen Stabes.

Die in § 3 bewiesenen Formeln benutzen wir zum Nachweis der Gleichung

$$(42)\quad \lim_{n=\infty}\int_{K_n} \frac{(e^{az}\cos mz - 1)\int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{\left(e^{az} + e^{-az}\right)\cos mz - 2}\,dz = 2\pi i f(x),$$

in der a eine positive, m eine reelle Zahl bedeutet, und die positiven Grössen x_0, x, x_1 die Bedingungen erfüllen:

$$0 < x - x_0 < x_1 - x_0 \leq a.$$

Die willkürliche Funktion genüge wieder den in § 4 ausgesprochenen Voraussetzungen.

Ersetzen wir den Integranden in (42) durch eine solche kongruente Funktion, dass für $e^{az}\cos mz - 1$ im

Zähler der Ausdruck $1 - e^{-az}\cos mz$ eintritt, und führen die Kreise K_n vermöge der Substitution $az = -v$ in die Kreise K'_n über, so folgt, wenn wir den Integranden in (42), in dem die Grenzen des bestimmten Integrals x_0, x sind, mit $\Phi_1(z)$ bezeichnen, und

$$\frac{m}{a} = b,\quad p(b,v) = e^{v(1+ib)} + e^{v(1-ib)} - 2 \text{ setzen:}$$

$$(43)\quad \int_{K_n} \Phi_1(z)\,dz = \int_{K'_n} \frac{p(b,v)\left[f(x) - f(x_0)\,e^{-\frac{x-x_0}{a}v} - \int_{x_0}^{x} e^{-\frac{x-\mu}{a}v} f'(\mu)\,d\mu\right]}{E(b,v)}\,\frac{dv}{v}.$$

Hierin ist nach § 3 die Funktion $E(b,v) = p(b,v) + p(b,-v)$.

Das erste Glied auf der rechten Seite wird mit unendlich zunehmendem m gleich $\pi i f(x)$ nach Formel (11), das zweite verschwindet, weil $\frac{x-x_0}{a}$ ein positiver echter Bruch ist, wegen (12) uud (13).

Nach § 3 liegen die absoluten Beträge der Funktionen

$$\frac{e^{\left[1-\frac{x-\mu}{a}+ib\right]v}}{E(b,v)} \quad \text{und} \quad \frac{e^{-\frac{x-\mu}{a}v}}{E(b,v)}$$

in dem Intervall von $\mu = x_0$ bis $\mu = x$ und auf den Kreisen K'_n unter einer festen von μ unabhängigen Grenze. Daher kann der dritte Term, wenn die Integrationsfolge vertauscht und das Gebiet (x_0, x) in die Teilbereiche $(x_0, x-\delta)$ und $(x-\delta, x)$ gespalten wird, dem absoluten Betrage nach beliebig klein gemacht werden.

Folglich konvergiert $\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \Phi_1(z)\,dz$ gegen $\pi i f(x)$, resp. $\pi i f(x-0)$.

Der zu $\Phi_1(z)$ komplementäre Integrand in (43) sei $\Phi_2(z)$, dann ist

$$\int_{K_n} \Phi_2(z)dz = \int_{K'_n} \frac{p(b,v)\left[f(x_1)\, e^{\frac{x_1-x}{a}v} - f(x) - \int_x^{x_1} e^{\frac{\mu-x}{a}v} f'(\mu)d\mu\right]}{E(b,v)} \frac{dv}{v}.$$

Mit wachsendem n wird der erste Summand gleich $2\pi i f(x_1)$, wie aus (14) und (13) sofort folgt, der zweite gleich $-\pi i f(x)$. Für den dritten Term ergibt sich durch Spaltung des Bereichs (x, x_1) in die Teilbereiche $(x, x+\delta)$ und $(x+\delta, x_1)$, sowie durch eine einfache Umformung der Wert $2\pi i[f(x) - f(x_1)] + \vartheta$, wobei $|\vartheta|$ für ein hinreichend grosses n bei allen Werten, die μ in den beiden Teilbereichen annehmen kann, unter jedem noch so klein gegebenen, positiven Betrage liegt.

Folglich konvergiert $\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \Phi_2(z)dz$ gegen $\pi i f(x)$, resp. $\pi i f(x+0)$, also gilt in der Tat Gleichung (42).

Wird in dieser für den Integranden die kongruente Funktion substituiert, so folgt die Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{(e^{az}\cos mz + c)\int_{x_0}^{x_1} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)d\mu}{(e^{az}+e^{-az})\cos mz - 2}\, dz = 2\pi i f(x),$$

in der c eine beliebige Constante bedeutet, denn es kann auf Grund der vorangegangenen Betrachtung leicht gezeigt werden, dass

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{\int_{x_0}^{x_1} e^{\pm z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{(e^{az}+e^{-az})\cos mz - 2}\, dz = 0 \quad \text{ist.}$$

Setzen wir in (42) speziell $m = 0$, $a = 2\pi$, so ergibt sich die Fouriersche Entwicklung, weil in diesem Falle die Funktion $\frac{e^{az}\cos mz - 1}{(e^{az}+e^{-az})\cos mz - 2}$ der Funktion $\frac{1}{e^{2\pi z}-1}$ hinsichtlich der Residuensumme kongruent wird.

Der Gleichung (25) analog lässt sich die folgende beweisen, sobald wie früher $x_1 - x_0$ nicht grösser als a ist:

$$(44) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{az} \sin mz \int_{x_0}^{x_1} e^{-z(x+\mu-2x_0)} f(\mu)\,d\mu}{\left(e^{az}+e^{-az}\right)\cos mz - 2}\,dz = 0\,.$$

Hierin darf $\sin mz$ durch $e^{\pm imz}$, also auch durch $\cos mz$ ersetzt werden, ohne dass der Beweis eine Modifikation benötigte.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir die Möglichkeit der Entwicklung einer willkürlichen Funktion in die beim Problem der lateralen Schwingungen eines an beiden Enden eingespannten elastischen Stabes auftretende Reihe nachweisen. Wenn die Enden des Stabes den Abscissen $x = 0$, bezw. $x = a$ entsprechen, betrachten wir die Cauchysche Hilfsfunktion

$$\Psi(z) = \frac{\left(e^{az}\cos az - 1\right) q(zx) - e^{az}\sin az\, q(-zx)}{\left(e^{az}+e^{-az}\right)\cos az - 2} \int_0^a e^{-z\mu} f(\mu)\,d\mu\,,$$

in der $q(zx) \equiv e^{zx} - \cos zx - \sin zx$.

Die einzelnen Glieder von $\Psi(z)$ integrieren wir auf den Kreisen K_n, deren diskret wachsende Radien sich nach § 3 bestimmen lassen, und erhalten zunächst aus (42) und (44):

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{\left(e^{az}\cos az - 1\right) e^{zx} \int_0^a e^{-z\mu} f(\mu)\,d\mu}{\left(e^{az}+e^{-az}\right)\cos az - 2}\,dz = 2\pi i f(x), \text{ ferner}$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{az}\sin az \int_0^a e^{-z(x+\mu)} f(\mu)\,d\mu}{\left(e^{az}+e^{-az}\right)\cos az - 2}\,dz = 0\,,$$

wobei nach den obigen Voraussetzungen x die Bedingung füllt: $0 < x < a$.

Die übrigen Glieder von $\Psi(z)$ bringen wir durch die Substitution $az = v$ auf die Form:

$$(45)\quad 2\frac{\left\{\cos\frac{x}{a}v\left[1-e^{v(1-i)}\right]+\sin\frac{x}{a}v\left[1-e^{v(1+i)}\right]\right\}\int_0^a e^{-\frac{v}{a}\mu}f(\mu)d\mu}{E(1,v)}.$$

Da $E(1,v)$ für $v' = \pm iv$ in sich übergeht, kann vermittelst der Formeln (12) und (13) gezeigt werden, dass

$$\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{e^{\pm i\frac{x}{a}v}\int_0^a e^{-\frac{v}{a}\mu}f(\mu)d\mu}{E(1,v)}dv = 0 \text{ ist. Daraus folgt:}$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{\left(\cos\frac{x}{a}v+\sin\frac{x}{a}v\right)\int_0^a e^{-\frac{v}{a}\mu}f(\mu)d\mu}{E(1,v)}dv = 0.$$

Ebenso ergibt sich auf Grund der Formeln in § 3 die Gleichung:

$$\lim_{n=\infty}\int_{K'_n}\frac{\left[\cos\frac{x}{a}ve^{v(1-i)}+\sin\frac{x}{a}ve^{v(1+i)}\right]\int_0^a e^{-\frac{v}{a}\mu}f(\mu)d\mu}{E(1,v)}dv = 0,$$

also ist $\lim_{n=\infty}\int_{K_n}\Psi(z)dz = 2\pi i f(x)$, folglich gilt für die willkürliche Funktion in unserem Problem die von Cauchy[1]) angegebene Entwicklung:

$$f(x) = \frac{1}{2a}\sum_{\rho}\frac{\left(e^{ar_\rho}\cos ar_\rho - 1\right)q(r_\rho x) - e^{ar_\rho}\sin ar_\rho\, q(-r_\rho x)}{\mathfrak{Sin}\,ar_\rho\cos ar_\rho - \mathfrak{Cos}\,ar_\rho\sin ar_\rho}\int_0^a e^{r_\rho\mu}f(\mu)d\mu.$$

[1]) Mémoire sur l'application du calcul des résidus, p. 34.

Hierbei ist das Summenzeichen auf sämtliche reelle und rein imaginäre Lösungen r_ρ der Gleichung $\mathfrak{Cof}az\cos az = 1$ auszudehnen mit Ausnahme der Wurzel $r_0 = 0$, bei der $\Psi(z)$ nicht singulär wird.

Wenn nur das eine Ende des Stabes eingespannt ist, das andere aber frei bleibt, gelingt es durch Berücksichtigung der Schlussbemerkung von § 3 mit Hilfe der Funktion

$$\frac{(e^{az}\cos az + 1)q(zx) \quad e^{-az}\sin az\, q(-zx)}{(e^{az}+e^{-az})\cos az + 2} \int_0^a e^{-z\mu} f(\mu)\, d\mu$$

die Entwicklung nachzuweisen:

$$f(x) = \frac{1}{2a}\sum_\sigma \frac{(e^{as_\sigma}\cos as_\sigma + 1)q(s_\sigma x) - e^{-as_\sigma}\sin as_\sigma q(-s_\sigma x)}{\mathfrak{Sin}as_\sigma\cos as_\sigma - \mathfrak{Cof}as_\sigma\sin as_\sigma} \int_0^a e^{-s_\sigma\mu} f(\mu)\, d\mu,$$

in der sich das Summenzeichen auf alle Wurzeln s_σ der Gleichung $\mathfrak{Cof}az\cos az = -1$ erstreckt.

Lebenslauf.

Am 4. Oktober 1885 wurde ich, Eugen Freund, jüdischer Religion, zu Neu-Heiduk, Kreis Beuthen O/S, geboren als Sohn des Kaufmanns Hermann Freund und seiner Frau Cäcilie geb. Graetzer. Nachdem ich die Volksschule sowie die Realschule in Königshütte absolviert hatte, besuchte ich drei Jahre die Oberrealschule zu Kattowitz, die ich Ostern 1905 mit dem Zeugnis der Reife verliess und dem herzlichsten Dank für die vielfachen von meinen verehrten Lehrern, Herrn Oberrealschuldirektor Dr. Hacks und Herrn Oberlehrer Koenig, im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht empfangenen Anregungen. Drei Semester an der Berliner Universität immatrikuliert, widmete ich mich zuerst dem Studium der Chemie, nahm aber bald Mathematik, Physik und Philosophie in den Kreis meiner Studien auf. Seit Michaelis 1906 setze ich diese an der Universität Breslau fort.

In dankbarer Gesinnung nenne ich die Namen der Herren Professoren und Dozenten, deren Vorlesungen und Uebungen ich besucht habe:

Döring, Förster, Hettner, van't Hoff, Knoblauch, Kurlbaum, Landolt, Lehmann-Filhés, Marckwald, Menzer, R. J. Meyer, Münch, Nernst, Riehl, Rosenheim, Rubens, E. Schmidt, Schur, H. A. Schwarz, Thiele, Valentiner an der Universität Berlin, Abegg, Baumgartner, Hintze, Hönigswald, Kneser, Kühnemann, Ladenburg, Lummer, Muther †, Pringsheim, Rosanes, Cl. Schäfer, W. Stern, Sturm, v. Wenckstern an der Universität Breslau.

Ganz besonders gilt mein Dank Herrn Professor Kneser für die in seinen Vorlesungen und Seminaren erhaltene Förderung und für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit.